Кахута Н.Д. Общая теория бинарных отношений: полный образ и ограничение / Буй Д.Б., Кахута Н.Д., Сильвейструк Л.М. // Всероссийская научная конференция с Международным участием. Проблемы критических ситуаций в точной механике и управлении. – Саратов. – ООО Издательский Цент «Наука». – 2013 г. - С. 37 – 41.

УДК 004.655

Н.Д. Кахута

кандидат физико-математических наук,

доцент кафедры компьютерных наук,

декан факультета экономики и предпринимательства,

ВУЗ "Университет экономики и права« КРОК »,

г. Киев

Общая теория бинарных отношений: полный образ и ограничение

Теория бинарных отношений является традиционной частью теории множеств, здесь имеется обширная библиография, упомянем только работы [1-3]. Среди современных успешных применений этой теории отметим анализ критических инфраструктур [4] и табличные алгебры [5] (последние выступают обобщением известных реляционных алгебр Кодда).

Эффективность применения теории в последнем случае связана с наличием простых и естественных представлений сигнатурных операций табличных алгебр с помощью конструкций полного образа и ограничения.

Ниже приведем представительные результаты для указанных общезначимых теоретико-множественных конструкций.

Зафиксируем универсум **D**, элементы которого обозначим x, *y, z,...* Подмножества универсума обозначим *X, Y,* ..., бинарные отношения на D - *U, V,...;* функциональные бинарные отношения - f , g...

Как обычно, *полным образом множества* ***X*** *относительно отношения* ***U*** назовем множество $U[X] \overset{def}{=} \{y \mid \exists x\,(x \in X \,\&\, <x, y> \in U)\}$; *композицией отношений U и V - отношение*

$U \circ V \overset{def}{=} \{<x,y> \mid \exists z(<x,z> \in V \,\&\, <z,y> \in U)\}$. *Пустое отношение* обозначим ε. *Отношение U* назовем *тотальным*, если $\pi_1^2 U = D$. Под дополнением $\overline{X}$ множества *X* понимаем дополнение к универсуму $\overline{X} \overset{def}{=} D \setminus X$.

Предложение 1 (свойства полного образа). Выполняются утверждения:

1) $U_1 \subseteq U_2 \,\&\, X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow U_1[X]_1 \subseteq U_2\,[X]_2$ (монотонность по совокупности аргументов);

2) $U[\bigcup_i X_i] = \bigcup_i U[X_i]$, $(\bigcup_i U_i)[X] = \bigcup_i U_i[X]$ (дистрибутивность относительно объединения);

3) $U[\bigcap_i X_i] \subseteq \bigcap_i U[X_i]$(верхняя оценка полного образа пересечения);

4) $U_1\,[U_2[X]] = (U_1 \circ U_2)[X]$ (полный образ относительно композиций отношений или полный образ полного образа);

5) $U[X] = U[X \cap \pi_1^2 U]$;

6) $U[X] = \emptyset \Leftrightarrow X \cap \pi_1^2 U = \emptyset$ (критерий пустоты полного образа); в частности, $\varepsilon[X] = U[\emptyset] = \emptyset$ (сохранение пустого отношения и пустого множества) и, в предположении тотальности отношения *U*, - $U[X] = \emptyset \Leftrightarrow X = \emptyset$;

7) $U[X] \setminus U[Y] \subseteq U[X \setminus Y] \subseteq U[X] \subseteq \pi_2^2 U$ (нижняя и верхняя оценка полного образа разности, верхняя оценка полного образа);

8) $\pi_2^2 U \setminus U[X] \subseteq U[\overline{X}] \subseteq \pi_2^2 U$ (нижняя и верхняя оценка полного образа дополнения).

Ниже ограничение бинарного отношения по множеству понимается стандартно: $U|X \overset{del}{=} U \cap (X \times D)$.

Предложение 2 (достаточные условия дистрибутивности полного образа относительно пересечения и разности). Свойства полного образа:

1) ограничение $U|\bigcup_{i \in I} X_i$ инъективное $\Rightarrow U[\bigcap_{i \in I} X_i] = \bigcap_{i \in I} U[X_i]$;

2) $f^{-1}[\bigcap_i X_i] = \bigcap_i f^{-1}[X_i]$;

3) ограничение $U|\,(X \cup Y)$ инъективное $\Rightarrow U[X \setminus Y] = U[X] \setminus U[Y]$;

4) $f^{-1}[X \setminus Y] = f^{-1}[X] \setminus f^{-1}[Y]$.

Предложение 3 (критерий дистрибутивности полного образа относительно пересечения). Выполняется эквивалентность

$\bigcap_{i \in I} U[X_i] \subseteq U[X_0] \Leftrightarrow \bigcap_{i \in I} U[X_i \setminus X_0] \subseteq U[X_0]$, где $X_0 \overset{def}{=} \bigcap_{i \in I} X_i$;

в частности, для случая пересечения двух множеств

$U[X_1] \cap U[X_2] \subseteq U[X_1 \cap X_2] \Leftrightarrow U[X_1 \setminus X_2] \cap U[X_2 \setminus X_1] \subseteq U[X_1 \cap X_2]$.

Предложение 4 (критерий дистрибутивности полного образа относительно разницы). Выполняется эквивалентность

$U[X \setminus Y] \subseteq U[X] \setminus U[Y] \Leftrightarrow U[X \setminus Y] \cap U[Y] = \emptyset$.

Полный образ естественным образом позволяет унарные (бинарные) операции на универсуме распространять на булеан универсума.

Пусть $f: D \rightrightarrows D$, через $[f]$: $P(D) \to P(D)$ обозначим унарную тотальную операцию на булеане универсума D, которая индуцируется частичной функцией f и задается равенством $[f](X) \overset{def}{=} f[X]$. Аналогично $[U](X) \overset{def}{=} U[X]$.

Пусть $F: \boldsymbol{D} \times \boldsymbol{D} \rightrightarrows \boldsymbol{D}$ - бинарная частичная операция на **D**; она также индуцирует бинарную тотальную операцию $[F]$: $P(\boldsymbol{D}) \times P(\boldsymbol{D}) \to P(\boldsymbol{D})$ на булеане ***D*,** которая задается равенством $[F](X, Y) \overset{def}{=} F[X \times Y]$.

Предложение 5 (критерий инъективности операции вида [*f*]). Выполняется эквивалентность:

функция *f* инъективная и тотальная ⇔ операция [*f*] инъективная.

Предложение 5' (достаточное условие инъективности тотальной операции вида [U]). Выполняется импликация:

отношения U инъективное и тотальное ⇨ операция $[U]$ инъективная.

Предложение 6 (наследование инъективности отношением [U]). Заполнение табл. 1 корректно.

Габлиця1

Логичная связь между свойствами инъективности исходного отношения U и индуцированой операции [U]

№ н/п	свойства отношения U			инъективность операции $[U]$
	функциональность	тотальность	инъективность	
	1	2	3	4
1.	+	+	+	+
2.	+	-	-I-	-
3.	+	+	-	-
4.	+	-	-	-
5.	-	+	+	+
6.	-	-	+	-
7.	-	-	-	-
8.	-	+	-	±

Следующее утверждение раскрывает связь между свойствами коммутативности и ассоциативности при распространении бинарных операций с элементов на множества. Основная идея доказательства заключается в том, что на одноэлементных множествах распространение по сути совпадает с начальной операцией.

Если уточнять последнее утверждение, то речь идет о том, что

отображение $x \overset{\varphi}{a} \{x\}$ - однозначный гомоморфизм частичной алгебры (группоида) $<$ **D**; F $>$ в алгебру (группоид) < P(**D**);[F]>, где $P(\boldsymbol{D})$ - как и раньше, булеан универсума $\boldsymbol{D}$.

Предложение 7 (критерии коммутативности и ассоциативности операции [F]). Выполняются эквивалентности:
бинарная частичная операция F коммутативна (ассоциативна) ⇔ бинарная тотальная операция [F] коммутативна (ассоциативна).

В следующем преложении рассматриваются свойства ограничения. Параметрический оператор на множестве отношений $U \ a \ U \mid X$ обозначим $\uparrow X$. Как обычно, под *оператором замыкания* на частично упорядочном множестве подразумевается идемпотентный, монотонный и убывающий (или возрастающий) оператор.

Предложение 8 (свойства ограничения). Свойства ограничения:

1. $U_1 \subseteq U_2 \ \&\ X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow U_1 | X_1 \subseteq U_2 \mid X_2$ (монотонность ограничения; в частности, монотонность параметрического оператора $\uparrow X$);
2. $\pi_1^2(U \backslash\ X) = \pi_1^2 U \cap X$, $\pi_2^2(U \backslash\ X) = U[X]$ (проекция ограничения по первой и второй компоненте; связь между полным образом и ограничением);
3. $U| X = \varepsilon \Leftrightarrow \pi_1^2\ U \cap X = \emptyset$ (критерий пустоты ограничения); в частности, $\varepsilon \mid X = \mathrm{U}| \emptyset = \varepsilon$ (сохранение ограничением пустого отношения и пустого множества);
4. $U \backslash X = U \mid (X \cap \pi_1^2 U), U = U \mid \pi_1^2\, \mathrm{U}$; в частности, $\pi_1^2 U \subseteq X \Leftrightarrow U| X = U;$
5. $(U|X) \mid \mathrm{Y} = U|(X \cap Y)$, или в операторном виде $\uparrow Y \circ \uparrow X = \uparrow(X \cap Y)$; (композиция ограничений); в частности, $\uparrow X_0 \uparrow X = \uparrow X$ (идемпотентность оператора $\uparrow X$);
6. $U \mid X \subseteq U$(оператор $\uparrow X$ убывает относительно теоретико-множественного включения $\subseteq$);
7. параметрический оператор $\uparrow X$ - оператор замыкания относительно теоретико- множественного включения $\subseteq$;
8. $(\bigcup_i U_i)|X = \bigcup_i (U_i|X),\ U \mid \bigcup_i X_i = \bigcup_i (U \mid X_i;)$ (дистрибутивность ограничения относительно объединения);
9. $(\bigcap_i U_i)|X = \bigcap_i (U_i\, |X),\ U|\bigcap_i X_i = \bigcap_i (U|X_i)$ (дистрибутивность ограничения относительно пересечения);
10. $f \subseteq \mathrm{g} \ \&\ X \subseteq dom f \Rightarrow f\ |X = g|X;$ в частности, $f \subseteq g \Rightarrow f = g|\ dom f, f \subseteq g \ \&\ dom f = dom g \Rightarrow f = g;$
11. $(U \mid X)[Y] = U[X \cap Y]$ (полный образ относительно ограничения).

Приведенные выше результаты демонстрируют богатстве! и содержательность фрагмента теории бинарных отношений, в котором основную роль играют конструкции полного образа и ограничения. Другие интересные результаты можно найти в [6-8].

Библиографический список

1. Риге Ж. Бинарные отношения, замыкания, соответствия Галуа / Ж. Риге // Киб. со. Сб. переводов. - М.: Иностр. лит-ра, 1963. - Вып. 7. - С. 129-185.
2. Шрейдер Ю.А. Алгебра бинарных отношений / /О.А. Шрейдер И Маркус С. Теоретико-множественные модели языков. - М.: Наука, 1970. - С. 300-330.
3. Вагнер В.В. Теория отношений и алгебра частичных отображений / В.В. Вагнер И Сб. статей. Вып. 1. - Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. - 1965. С.3-178.
4. Безопасность критических инфраструктур: математические и инженерные методы анализа и обеспечения / иод ред. Харченко В.С. - Министерство образования и науки Украины, НАУ им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», 2011. - С. 59-82.
5. Редько В. И. Реляційні бази даних: табличні алгебри та БОБ-подібні мови / В И. Редько, Ю.Й. Крона, Д.Б. Куй, С.А. Поляков - Київ: Видавничий дім ..Академгіеріодика", 2001. - 198 с.
6. КуйД.К. Властивості теоретико-множинних конструкцій повного образу та обмеження / Д.К. Куй, Н.Д. Кахута Н Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки. - 2005. - Вигі. 2. - С. 232-240.
7. КуйД.К. Властивості відношення конфінальносгі та устрій множини часткових функцій / Д.К. Куй. Н.Д. Кахута 11 Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-маг. науки. - 2006. - Вин. 2. - С. 125-135.
8. Кахута Н.Д. Відношення сумісності, узагальнене з’єднання та узагальнений прямий добуток / И.Д. Кахута // Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки. -2007.-Вигі. 4.-С. 167-173.