УДК 004.652

Математические основания реляционных баз данных. Часть 1: представления основных табличных операций

Н. Д. Кахута

Университет экономики и права «КРОК», Украина

Статья посвящена созданию фрагмента теории табличных алгебр, являющихся обобщением классических реляционных алгебр Кодда. Отличительной особенностью применяемой техники является использование свойств теоретико-множественных конструкций (полный образ множества относительно функции, ограничение функции по множеству, обобщенное прямое (декартово) произведение, бинарное отношение совместности функций) и их перенесение на табличный случай. Такое перенесение свойств возможно ввиду наличия простых представлений сигнатурных операций в терминах указанных теоретико-множественных конструкций.

Ключевые слова: *реляционные алгебры Кодда, табличные алгебры, полный образ, ограничение, обобщенное прямое произведение, отношение совместности.*

Стаття присвячена створенню фрагмента теорії табличних алгебр, які є узагальненням класичних реляційних алгебр Кодда. Особливістю застосовуваної техніки є використання властивостей теоретико-множинних конструкцій (повний образ множини відносно функції, обмеження функції за множиною, узагальнений прямий (декартів) добуток, бінарне відношення сумісності функцій) і їх перенесення на табличний випадок. Таке перенесення властивостей можливо через наявність простих зображень сигнатурних операцій в термінах зазначених теоретико-множинних конструкцій.

Ключові слова: *реляційні алгебри Кодда, табличні алгебри, повний образ, обмеження, узагальнений прямий добуток, відношення сумісності.*

Article is devoted to the creation of a fragment of the theory of table algebras, which are a generalization of the classical Codd's relational algebras. A distinctive feature of the technique is the use of set-theoretic properties of the some constructions (whole image of the set with respect to the function, restriction the function over the set, the generalized Cartesian product, a binary relation of functions consistency) and their transfer to the table case. The transfer is possible because simple representations of signature operations in terms of these set-theoretic constructions are hold.

Key words: *Codd's relational algebras, table algebras, whole image, restriction, the generalized Cartesian product, consistency relation.*

1. Введение

Статья посвящена созданию фрагмента теории табличных алгебр, построенных на основе классических реляционных алгебр Кодда. Отличительной особенностью применяемой техники является использование свойств теоретико-множественных конструкций и их перенесение на табличный случай.

2. Табличные алгебры: основные определения

Теория табличных алгебр формирует теоретический фундамент языков запросов современных табличных баз данных. Исследованию табличных алгебр посвящены работы [1-13]. Элементы носителя этих алгебр уточняют табличные (реляционные) структуры данных, а сигнатурные операции построены на базе основных табличных манипуляций в реляционных алгебрах Кодда [14-20] и в SQL-подобных языках: сигнатурными операциями являются объединение, пересечение, разность, селекция, проекция, соединение (эквисоединение), активное дополнение, переименование и деление.

Сделаем несколько замечаний по форме изложения материала. Леммы, предложения, следствия, теоремы, формулы имеют сквозную нумерацию. Символ □ означает конец формулировки утверждения и конец доказательства, символ ▫ – конец логической части доказательства.

При рассмотрении структур данных абстрагируемся от различных доменов атрибутов (т.е. рассматриваем один универсальный домен), от специального значения NULL в доменах, а также от дубликатов строк таблиц, не имеющих первичного ключа (PRIMARY KEY) (по поводу этих аспектов см. [13, раздел 3, с. 125-183]). Для замкнутости текста приведем основные определения.

Уточим таблицы (реляции) в терминах именных множеств [21-24]. Для этого зафиксируем два множества: $\boldsymbol{A}$, элементы которого назовем *атрибутами*, и $\boldsymbol{D}$ – *универсальный домен*. Далее эти множества будут выступать в роли множеств имен и денотатов соответственно.

Произвольное (конечное) множество атрибутов $R \subseteq \boldsymbol{A}$ назовем *схемой*. Схемы будем обозначать как R, R_1, R_2, …

Строкой схемы R называется именное множество на паре R, $\boldsymbol{D}$, проекция которого по первой компоненте равна R. Таким образом, строка схемы R – это функция вида $s: R \to \boldsymbol{D}$. Строки будем обозначать как $s, s_1, s_2, \ldots$.

Таблицей схемы R называется (конечное) множество строк той же схемы R. Таблицы будем обозначать как t, t_1, t_2, … Множество всех строк (таблиц) схемы R обозначим через $S(R)$ (соответственно $T(R)$), а множество всех строк (таблиц) – S (соответственно T). Таким образом, имеем $S \overset{def}{=} \bigcup\limits_{R \subseteq \boldsymbol{A}} S(R)$, $T(R) \overset{def}{=} 2^{S(R)}$, $T \overset{def}{=} \bigcup\limits_{R \subseteq \boldsymbol{A}} T(R)$.

Здесь и всюду далее 2^X обозначает множество всех (конечных) подмножеств множества X.

Схема может быть пустой; при этом существует единственная строка пустой схемы, которая обозначается как ε. Отметим, что с семантической точки зрения пустая строка – всюду неопределенная функция (график такой функции пуст).

Носителем табличной алгебры является множество всех таблиц T. Зададим операции. Начнем с теоретико-множественных операций, которые используют только множественную структуру таблиц, отвлекаясь от функциональной структуры строк – элементов таблиц.

Определение 1. Под *объединением* $\cup_R$ (*пересечением* $\cap_R$, *разностью* $\setminus_R$) *таблиц схемы* R понимается бинарная параметрическая частичная операция, получаемая ограничением теоретико-множественного объединения (соответственно пересечения и разности) на множество всех таблиц схемы R.

Таким образом, $\bigcup_R : T \times T \tilde{\to} T$, $dom \bigcup_R = T(R) \times T(R)$, $t_1 \bigcup_R t_2 \overset{def}{=} t_1 \bigcup t_2$, где $t_1, t_2 \in T(R)$; для пересечения и разности полностью аналогично.□

Тут и далее стрелка вида $\tilde{\to}$ используется для записи частичных операций. Переходим к операции селекции.

Пусть $p : S \tilde{\to} \{true, false\}$ – вообще говоря, частичный предикат на множестве всех строк, где $true, false$ – логические значения истины и лжи соответственно.

Определение 2. Под *селекцией по предикату p* понимается унарная параметрическая операция σ_p, которая таблице сопоставляет ее подтаблицу, содержащую только те строки, на которых предикат *p* истинный.

Таким образом, $\sigma_p : T \to T$, $\sigma_p(t) \overset{def}{=} t \bigcap p^{-1} true$, где $p^{-1} true$ – соответствующий полный прообраз – множество всех строк, на которых предикат истинный (точнее надо было бы писать $p^{-1}(\{true\})$).□

Отметим, что на рассматриваемом уровне абстракции структура предикатов-параметров селекций не конкретизируется.

Теперь переходим к специальным операциям, которые используют (функциональную) структуру элементов таблиц – структуру именных множеств.

Пусть $X \subseteq \boldsymbol{A}$ – (конечное) множество атрибутов.

Определение 3. Под *проекцией по множеству атрибутов X* понимается унарная параметрическая операция π_X, значениями которой выступают таблицы, состоящие из ограничений по множеству атрибутов *X* всех строк исходных таблиц.

Таким образом, $\pi_X : T \to T$, $\pi_X(t) \overset{def}{=} \{s \mid X \mid s \in t\}$.□

Здесь и далее $s \mid X$ – ограничение строки s по множеству *X*, которое понимается стандартно: $s \mid X \overset{def}{=} s \bigcap X \times \boldsymbol{D}$. Полностью аналогично вводится ограничение бинарного отношения по множеству: $U \mid X \overset{def}{=} U \bigcap X \times \pi_2^2 U$.

Определение 4. Под *соединением* понимается бинарная операция $\otimes$, значениями которой являются таблицы, состоящие из всевозможных объединений совместных строк таблиц-аргументов.

Таким образом, $\otimes : T \times T \to T$, $t_1 \otimes t_2 \overset{def}{=} \{s_1 \bigcup s_2 \mid s_1 \in t_1 \,\&\, s_2 \in t_2 \,\&\, s_1 \approx s_2\}$.□

Здесь и всюду далее $\approx$ – бинарное отношение совместности бинарных отношений (в частности, функций и строк):

$$U_1 \approx U_2 \overset{def}{\Leftrightarrow} U_1 \mid X = U_2 \mid X,$$

где $X = \pi_1^2 U_1 \bigcap \pi_1^2 U_2$ – пересечение проекций по первой компоненте исходных бинарных отношений.

Рассматривая определение соединения, следует учитывать, что в общем случае при объединении функций свойство функциональности нарушается (это показывается на простых примерах). Поэтому для обоснования корректности определения операции соединения надо учесть функциональность объединения совместных функций ([13, подраздел 2.7, лемма 2.7.1]).

В этой операции атрибуты несут семантическую нагрузку: из равенства атрибутов должно вытекать равенство значений этих атрибутов в строках, которые формируют результат соединения.

Непосредственно из определения вытекает, что $t_1 \otimes t_2 = \{s \in S(R_1 \bigcup R_2) \mid s \mid R_1 \in t_1 \,\&\, s \mid R_2 \in t_2\}$, где $t_1 \in T(R_1)$, $t_2 \in T(R_2)$. Именно так вводится соединение под названием *естественного соединения* либо *эквисоединения* в [25, подраздел 2.4].

Пусть R_1, R_2 – схемы, причем $R_2 \subseteq R_1$.

Определение 5. Под *делением таблиц схемы* R_1 *на таблицы схемы* R_2 понимается бинарная параметрическая частичная операция $\div_{R_2}^{R_1}$ с областью определенности $T(R_1) \times T(R_2)$, значения которой задаются выражением: $t_1 \div_{R_2}^{R_1} t_2 \overset{def}{=} \{s \in \pi_{R_1 \setminus R_2}(t_1) \mid \{s\} \otimes t_2 \subseteq t_1\}$, где $t_1 \in T(R_1), t_2 \in T(R_2)$.□

Операция активного дополнения вводится, следуя [25]. Активное дополнение аппроксимирует в некотором смысле теоретико-множественное дополнение (подробности см. в [13, подраздел 2.2]). Для введения активного дополнения понадобится несколько вспомогательных понятий.

Определение 6. Пусть A – атрибут, t – таблица схемы R, тогда $D_{A,t} \overset{def}{=} \{d \mid \exists s (s \in t \,\&\, \langle A, d \rangle \in s)\}$ – *активный домен атрибута* A относительно таблицы t (по терминологии [25, подраздел 2.1, с. 20]).□

Определение 7. Положим по определению $C(t) \overset{def}{=} \underset{A \in R}{N} D_{A,t}$, причем для пустой таблицы (пустого множества строк) надо выбрать непустую схему, где, как и ранее, R – схема таблицы t.□

Здесь N – оператор построения семейства всех именных множеств, отвечающих индексированию; дадим общее определение.

Зафиксируем множества V и Σ, где множество V выступает в роли множества *имен*, а множество Σ – множества *денотатов*.

Пусть $\{\Sigma_v\}_{v \in U}$ (т.е. $v \mapsto \Sigma_v$) – некоторое индексирование подмножеств денотатов $\Sigma_v \subseteq \Sigma$ именами (конечного) множества имен $U \subseteq V$.

Определение 8. Под *именным множеством, отвечающим* данному *индексированию*, понимается именное множество на паре $U, \bigcup_{v \in U} \Sigma_v$, проекция которого по первой компоненте совпадает с множеством U, а значение (денотат) любого имени $v \in U$ входит в множество Σ_v.□

Семейство всех таких именных множеств обозначим как $\underset{v\in U}{N}\Sigma_v$. Положим по определению, что существует единственное именное множество, которое отвечает всюду неопределенному индексированию, – пустое именное множество ε. Таким образом, $\underset{v\in\varnothing}{N}\Sigma_v \overset{def}{=} \{\varepsilon\}$.

Отметим, что так введенный оператор построения семейства всех именных множеств, отвечающих индексированию, по сути совпадает с теоретико-множественной конструкцией обобщенного прямого (декартова) произведения – $\underset{v\in U}{N}\Sigma_v = \prod_{v\in U}\Sigma_v$ (см., например, [26]).

Следуя [27, 28] $C(t)$ – называется *насыщением таблицы t*. Нетрудно проверить, что $C(t)$ – таблица той же схемы, что и исходная таблица.

Отметим, что насыщение таблицы семантически близко прямоугольному замыканию бинарного отношения [29].

Определение 9. Под *активным дополнением* понимается унарная операция ~, которая таблице сопоставляет дополнение до ее насыщения.

Таким образом, $\sim: T \to T$, $\tilde{t} \overset{def}{=} C(t)\setminus t$.□

Под *переименованием* понимается унарная, вообще говоря, частичная параметрическая операция $Rt_\xi : T \tilde{\to} T$, где параметром выступает отображение $\xi : \boldsymbol{A} \tilde{\to} \boldsymbol{A}$ – инъективное отображение на множестве атрибутов, которая только переименовывает атрибуты таблиц-аргументов (согласно отображения-параметра ξ).

Формальное определение переименования требует дополнительных понятий. Начнем с содержательных соображений. Переименование таблицы – это переименование всех атрибутов ее схемы; поэтому переименование таблицы сводится к переименованию ее строк; причем два этих переименования связаны между собой конструкцией полного образа. В свою очередь переименование строки – это переименование только первых компонент пар – элементов строки. Перейдем к точным определениям.

Пусть $\eta : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$ – некоторая тотальная функция переименования атрибутов, вообще говоря, неинъективная.

Семейство всех (конечных) бинарных отношений на паре множеств $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{D}$ обозначим через S' (отметим, что множество всех строк S совпадает с множеством всех (конечных) функциональных бинарных отношений на паре множеств $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{D}$; т.е. $S \subseteq S'$).

Определение 10. Под *переименованием строк*, отвечающим функции переименования атрибутов η, понимается отображение

$$Rs_\eta : S \to S', Rs_\eta(s) \overset{def}{=} \{ < \eta(A), s(A) > \mid A \in \pi_1^2(s)\},\ Rs_\eta(\varepsilon) = \varepsilon.□$$

Очевидно, что при таком переименовании строк может нарушиться свойство функциональности строк.

Теперь потребуем, чтобы функция переименования атрибутов η имела следующую структуру: зафиксируем инъективную частичную функцию вида $\xi : \boldsymbol{A} \tilde{\to} \boldsymbol{A}$ и положим $\eta \overset{def}{=} \xi \cup \mathrm{id}_{\boldsymbol{A} \setminus dom\,\xi}$.

Здесь и далее $\mathrm{id}_X : X \to X$ – диагональ на множестве X (тождественная функция).

Содержательно говоря, атрибуты множества $dom\,\xi$ переименовываются, а разности $\boldsymbol{A} \setminus dom\,\xi$ – остаются неизменными. Приведенное уточнение отвечает ситуации, когда глобально переименовывается только часть атрибутов таблиц базы данных, а остальные атрибуты остаются неизменными.

Отметим, что $\eta = \xi$ при условии тотальности функции ξ.

Определение 11. *Схему* R *назовем* ξ*-допустимой*, если $\xi[R] \cap (R \setminus dom\xi) = \varnothing$, где $\xi[R] \overset{def}{=} \{A \mid \exists B(B \in R \;\&\; \xi(B) \simeq A\}$ – полный образ схемы R относительно отображения ξ.□

Здесь и далее $\simeq$ – обобщенное равенство (сильное равенство Клини) [30].

Множество всех таблиц ξ-допустимых схем обозначим через T_ξ. Нетрудно проверить, что при переименовании строк ξ-допустимых схем свойство функциональности не нарушается (см. [13, подраздел 2.14, леммы 2.14.1, 2.14.2]).

Определение 12. Под *переименованием, отвечающим инъективной частичной функции переименования атрибутов* $\xi : \boldsymbol{A} \tilde{\to} \boldsymbol{A}$, понимается унарная параметрическая операция Rt_ξ с областью определенности T_ξ, значения которой задаются равенством:

$$Rt_\xi(t) = Rs_\eta[t],\; t \in T_\xi,$$

где, как и ранее, $\eta = \xi \cup \mathrm{id}_{\boldsymbol{A} \setminus dom\,\xi}$, в правой части последнего равенства записан полный образ таблицы-аргумента.□

Положим по определению

$$\Omega_{P,\Xi} \overset{def}{=} \left\{ \cup_R, \cap_R, \setminus_R, \sigma_p, \pi_X, \otimes, \div_{R_2}^{R_1}, Rt_\xi, \sim \right\}_{X,R,R_1,R_2 \subseteq \boldsymbol{A}}^{p \in P, \xi \in \Xi},$$

где P, Ξ – множества параметров (для операций селекции и переименования соответственно).

Определение 13. Частичную (параметрическую) алгебру $<T; \Omega_{P,\Xi}>$ назовем *табличной алгеброй*.□

Отметим, что деление и пересечение являются производными (по суперпозиции, без использования константных таблиц) относительно других сигнатурных операций (по поводу проблематики взаимной производности сигнатурных операций табличных алгебр см. [7, раздел 4; 13, подраздел 2.17, с. 97-124]).

При рассмотрении таблиц и их схем необходимо учитывать следующие особенности. Пустое множество строк, очевидно, является таблицей; назовем ее *пустой таблицей* и обозначим как $t_{\varnothing}$.

Поскольку существует единственное именное множество на паре $\varnothing$, D – а именно пустое именное множество ε, то существует и единственная строка схемы $\varnothing$ – ε; т.е. $S(\varnothing)=\{\varepsilon\}$.

Что касается таблиц пустой схемы $\varnothing$, то их существует две – $t_{\varnothing}$ і $t_{\varepsilon} \stackrel{def}{=} \{\varepsilon\}$. Действительно, $T(\varnothing)=2^{S(\varnothing)}=\{\varnothing,\{e\}\}=\{t_{\varnothing},t_{e}\}$.

Наконец, очевидно, что по непустой таблице ее схема восстанавливается однозначно, а пустой таблице $t_{\varnothing}$ можно приписать любую схему в том смысле, что $t_{\varnothing}\in T(R)$ для любой схемы R (подчеркнем еще раз, что специальная таблица t_{ε} имеет единственную схему – $\varnothing$).

Последнее утверждение можно записать и в такой форме

$$\forall R_1R_2(R_1\neq R_2\Rightarrow T(R_1)\bigcap T(R_2)=\{t_{\varnothing}\}).$$

3. Представления сигнатурных операций табличной алгебры

Основные сигнатурные операции табличных алгебр имеют естественные простые представления в терминах теоретико-множественных конструкций; именно эти представления и позволяют относительно просто перенести свойства полного образа, ограничения, обобщенного прямого произведения и других конструкций на табличный случай.

В следующем утверждении все обозначения используются в смысле монографии [13].

Предложение 1 (о представлениях основных сигнатурных операций табличных алгебр). Операции табличных алгебр имеют следующие представления:

1) $\pi_X(t)=\uparrow X[t]$, где $\uparrow X:S\to S$, $\uparrow X(s)=s\,|\,X$ (представление проекции через полный образ таблицы-аргумента относительно ограничения);

2) $t_1\otimes t_2=\bar{\bigcup}[t_1\times t_2]$, где $\bar{\bigcup}:S\times S\tilde{\to}S$, $dom\bar{\bigcup}=\{<s_1,s_2>|\,s_1\approx s_2\}$, $s_1\bar{\bigcup}s_2=s_1\bigcup s_2$ для всех $<s_1,s_2>\in dom\bar{\bigcup}$ (представление соединения через полный образ декартового произведения таблиц-аргументов относительно частичной операции объединения совместных строк);

3) $C(t)=\prod\limits_{A\in R}D_{A,t}$, где $D_{A,t}\stackrel{def}{=}\{d\,|\,\exists s(s\in t\wedge <A,d>\in s)\}$ – активный домен атрибута A относительно таблицы t, как и ранее R – схема таблицы t (представление насыщения через обобщенное прямое произведение для индексирования, сопоставляющего атрибуту схемы таблицы-аргумента его активный домен относительно таблицы-аргумента);

4) $Rt_{\xi}(t) = Rs_{\eta}[t]$, где $з \overset{def}{=} \xi \cup \mathrm{id}_{A \setminus dom\,\xi}$, $t \in T_{\xi}$ (представление переименования через полный образ таблицы-аргумента относительно переименования строк). □

Доказательство. Эти представления и доказательства их корректности приведены в монографии [13, раздел 2]: для проекции это [13, подраздел 2.2], для соединения – [13, подраздел 2.7], для насыщения – [13, подраздел 2.1], для переименования – [13, подраздел 2.1].□

Итак, установлены представления основных операций табличных алгебр через теоретико-множественные конструкции полного образа, ограничения и (обобщенного) прямого произведения. Подчеркнем еще раз, что наличие этих представлений позволяет получать свойства табличных операций в качестве следствий свойств указанных теоретико-множественных конструкций. Это будет сделано в следующем разделе работы.

4. Основные результаты

Установлены представления сигнатурных операций табличных алгебр: проекции, соединения, насыщения, переименования в терминах полного образа множества относительно ограничения функции, ограничения и (обобщенного) прямого произведения (предложение 1).

5. Заключение

В работе построен содержательный фрагмент теории табличных алгебр. Основная особенность используемой техники заключается, во-первых, в установлении естественных представлений сигнатурных операций этих алгебр в терминах теоретико-множественных конструкций полного образа, ограничения, обобщенного прямого соединения, отношения совместности и, во-вторых, в переносе свойств указанных конструкций на табличный случай.

Такому переносу будет посвящена вторая часть работы.

Это демонстрирует мощность используемого аппарата и, по мнению автора, этот теоретико-множественный аппарат может успешно применяться и в других областях.

Отметим, что применение указанных представлений дало возможность не только исследовать операции табличных алгебр, но и построить так называемую обобщенную табличную алгебру снятием требований конечности схем таблиц, самих таблиц и ограничения односхемности строк одной таблицы.

Отметим также, что многие аспекты реальных табличных систем управления базами данных (например, наличие дубликатов строк в таблицах, агрегатные функции, внешние соединения) не нашли своего отражения в табличных алгебрах, поэтому сама модель требует расширения. Это будет предметом рассмотрения в следующих работах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Брона Ю.Й. Основні співвідношення в табличних алгебрах // Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки. – 1997. – Вип. 3. – С. 143-148.

2. Брона Ю.Й. Оптимізація обчислення запитів у реляційних базах даних // Питання оптимізації обчислень: міжнародна конференція, 6-8 жовтня 1997 р., Київ, ІК ім. В.М. Глушкова НАНУ: праці. – 1997. – С. 45-49.
3. Брона Ю.Й. Умови декомпозиції без втрат у реляційних базах даних // Застосування обчислювальної техніки, математичного моделювання та математичних методів у наукових дослідженнях: IV всеукраїнська наукова конференція, 23-25 вересня 1997 р., Львів, Львівський університет: тези. – 1997. – С. 15.
4. Буй Д.Б., Брона Ю.Й. Взаємна незалежність операцій реляційних алгебр // Застосування обчислювальної техніки, математичного моделювання та математичних методів у наукових дослідженнях: всеукраїнська наукова конференція, 19-21 вересня 1995 р., Львів, Львівський університет: тези. – 1995. – С. 18.
5. Буй Д.Б., Брона Ю.Й. Операторы замыкания в теории реляционных баз данных // Тезисы докладов XI Международной конференции по проблемам теоретической кибернетики. Под ред. С.В. Яблонского. – Ульяновск: Изд-во СВНЦ. – 1996. – С. 29-30.
6. Буй Д.Б., Брона Ю.Й. Теоретико-множинні конструкції в теорії реляційних баз даних // Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки. – 1996. – Вип. 1. – С. 216-224.
7. Буй Д.Б. Теорія програмних алгебр композиційного типу та її застосування: дисертація доктора фізико-математичних наук: 01.05.03 – математичне та програмне забезпечення обчислювальних машин і систем / Буй Дмитро Борисович. – Київ, 2002. – 365 с.
8. Редько В.Н., Брона Ю.Й., Буй Д.Б. Информационный аспект Case-технологий: основные соотношения в табличных алгебрах // Проблемы программирования. – 1997. – Вып. 1. – С. 5-11.
9. Редько В.Н., Брона Ю.Й., Буй Д.Б. К основаниям теории реляционных баз данных: табличные алгебры. – Киев: Київський університет, 1996. – 105 с. – Рус. – Деп. в ГНТБ Украины 11.11.96, №3189УК-96.
10. Редько В.Н., Буй Д.Б. К основаниям теории реляционных моделей баз данных // Кибернетика и системный анализ. – 1996. – № 4. – С. 3-12.
11. Редько В.Н., Брона Ю.Й., Буй Д.Б. Реляционные алгебры: операции проекции и соединения // Кибернетика и системный анализ. – 1997. – № 4. – С. 89-100.
12. Редько В.Н., Брона Ю.Й., Буй Д.Б. Реляционные алгебры: операции деления и переименования // Кибернетика и системный анализ. – 1997. – № 5. – С. 3-15.
13. Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови / В.Н. Редько, Ю.Й. Брона, Д.Б. Буй, С.А. Поляков. – Київ: Видавничий дім „Академперіодика", 2001. – 198 с.
14. Codd E.F. A Relational Model of Data for Large Shared Data Banks // Communications of the ACM. – 1970. – Vol. 13, № 6. – P. 377-387.
15. Codd E.F. A Data Base Sublanguage Founded on the Relational Calculus // ACM-SIGFIDET Workshop on Data Description, Access and Control: international

conference, November 11-12, 1971, San Diego, California: proceedings. – 1971. – P. 35-68.
16. Codd E.F. Normalized Data Base Structure: A Brief Tutorial // ACM-SIGFIDET Workshop on Data Description, Access and Control: international conference, November 11-12, 1971, San Diego, California: proceedings. – 1971. – P. 1-17.
17. Codd E.F. Further Normalization of Data Base Relational Model // Data Base Systems. – 1972. – P. 33-64.
18. Codd E.F. Relational Completeness of Data Base Sublanguages // Data Base Systems. – 1972. – P. 65-93.
19. Codd E.F. Relational Database: A Practical Foundation for Productivity // Communications of the ACM. – 1982. – Vol. 25, № 2. – P. 109-117.
20. Codd E.F. The Relational Model for Database Management [2-nd edition] – Pearson:Addison-Wesley, 1990. – 538 p.
21. Редько В.Н. Композиции программ и композиционное программирование // Программирование. – 1978. – №5. – С. 3-24.
22. Редько В.Н. Основания композиционного программирования // Программирование. – 1979. – №3. – С. 3-13.
23. Редько В.Н. Семантические структуры программ // Программирование. – 1981. – № 1. – С. 3-19.
24. Редько В.Н. Основания программологии // Кибернетика и системный анализ. – 2000. – № 1. – С. 33-57.
25. Мейер Д. Теория реляционных баз данных. – Москва: Мир, 1987. – 608 с.
26. Куратовский К. Топология: В 2 т. – Москва: Мир, 1966. – Т. 1. – 594 с.
27. Цаленко М.Ш. Моделирование семантики в базах данных. – Москва: Наука, 1989. – 288 с.
28. Цаленко М.Ш. Семантические и математические модели баз данных. – Москва: ВИНИТИ, 1985. – 207 с.
29. Риге Ж. Бинарные отношения, замыкания, соответствия Галуа // Кибернетический сборник: сборник переводов. – Москва: ИЛ, 1963. – Вып. 7. – С. 129-185.
30. Катленд Н. Вычислимость. Введение в теорию рекурсивных функций. – М.: Мир, 1983. – 256 с.

Надійшла у першій редакції 21.04.2014, в останній - 01.05.2014.