УДК 004.655

Буй Д.Б.[1], д.ф.-м.н., проф.,
Кахута Н.Д.[2], к.ф.-м.н.,
Сільвейструк Л.М.[3], к.ф.-м.н., н.с.

Загальна теорія бінарних відношень: проекція та відношення сумісності

Метою статті є дослідження теоретико-множинних конструкцій для подальшого використання в табличних алгебрах. В роботі розглянуто проекцію та відношення сумісності та доведена низка критеріїв та властивостей даних конструкцій.

Ключові слова: проекція, відношення сумісності, таблична алгебра, повний образ.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Академіка Глушкова 4д, e-mail: dmitriybuy@mail.ru
[2] Університет економіки та права «КРОК», 03113, м. Київ, вул. Лагерна 30-32,
e-mail :krok@krok.edu.ua
[3] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Академіка Глушкова 4д,
e-mail: slm-klm@ukr.net

D.B. Buy[1], Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.
N.D. Kahuta[2], PhD (Phys.-Math.),
L.M. Silveistruk[3], PhD. (Phys.-Math.), Sci. Res.

The general theory of binary relations: the projection and related compatibility

The purpose of the article is to study the set-theoretic constructions for use in tabular algebra. The projection and compatibility relation are viewed and criteria and the properties of these structures are proved.

Key Words: projection, compatibility relation, tabular algebra, total transform.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d
e-mail: dmitriybuy@mail.ru
[2] University of Economics and Law «CROC», 03113, Kyiv, Lagernay st., 30-32,
e-mail: krok@krok.edu.ua
[3] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: slm-klm@ukr.net

Статтю представив чл.-кор. НАН України, проф. Анісімов А.В.

Теоретико-множинні конструкції успішно застосовуються в багатьох прикладних областях, зокрема в моделях даних [1] та в табличних алгебрах [2].

Ефективність застосування теорії бінарних відношень в табличних алгебрах пов'язана з існуванням простих та природніх зображень сигнатурних операцій за допомогою конструкцій проекції та відношення сумісності.

Нижче наводяться результати для вказаних теоретико-множинних конструкцій.

Зафіксуемо універсум $\boldsymbol{D}$, елементи якого позначимо *x, y, z,...* Підмножини універсуму позначимо *X, Y, ...,* бінарні відношення на $\boldsymbol{D}$ – *U, V,...*; функціональні бінарні відношення – *f, g,...* *Область означеності* (рос. – „область определенности" [3, гл. 1, § 1, с. 20]) функції *f* позначимо $domf$, вона співпадає з проекцією функції (як бінарного відношення) за першою компонентою – $domf = \pi_1^2 f$. Тут і далі, $\pi_i^2 U$ – проекція бінарного відношення за i-ю компонентою, $i = 1,2$.

Як звичайно, *повним образом множини X відносно відношення U* (за іншою термінологією *образом множини відносно відношення*) назвемо множину $U[X] \overset{def}{=} \{y \mid \exists x(x \in X \,\&\, < x, y > \in U)\}$.

Виходячи з наступного очевидного зображення проекції відношення (за першою чи другою компонентою) через повний образ відношення відносно селектора

$$\pi_i^2 U = I_i^2[U],\ i = 1, 2; \qquad (1)$$

де $I_i^2 : D \times D \to D$, $I_1^2(x, y) = x$, $I_2^2(x, y) = y$ – селектори, вкажемо загальнозначні властивості проекції; крім того наведемо цікаві властивості проекції, що перевіряються безпосередньо:

1) $\pi_i^2 \bigcap_j U_j \subseteq \bigcap_j \pi_i^2 U_j$ (верхня оцінка проекції перетину); $\pi_i^2 \bigcup_j U_j = \bigcup_j \pi_i^2 U_j$ (дистрибутивність проекції відносно об'єднань);

2) $\pi_1^2(X \times Y) = X$, якщо $Y \neq \varnothing$; $\pi_2^2(X \times Y) = Y$, якщо $X \neq \varnothing$ (проекції декартового добутку);

3) $\pi_i^2 U = \varnothing \Leftrightarrow U = \varepsilon$, $i = 1, 2$ (критерій порожності проекції);

4) $U \subseteq \pi_1^2(U) \times \pi_2^2(U)$ (верхня оцінка відношення в термінах декартового добутку проекцій);

5) $\pi_2^2 U = U[D]$ (вираз проекції за другою компонентою через повний образ);

6) $f \approx g \Rightarrow dom(f \setminus g) = dom(f) \setminus dom(g)$ (достатня умова дистрибутивності проекції за першою компонентою відносно різниці функцій).

7) $U_1 \subseteq U_2 \Rightarrow \pi_i^2 U_1 \subseteq \pi_i^2 U_2$, де $i = 1, 2$ (монотонність проекції за першою та другою компонентою).

В п. 6 використане $\approx$ – *бінарне відношення сумісності відношень*, зокрема, функцій: $U \approx V \overset{def}{\Leftrightarrow} U \mid X = V \mid X$, тут $X \overset{def}{=} \pi_1^2 U \bigcap \pi_1^2 V$ – перетин проекцій вихідних відношень за першою компонентою [2, підрозд. 1.3, с. 25].

Очевидно, що відношення сумісності рефлексивне, симетричне (що випливає з однойменних властивостей рівності), але нетранзитивне. Таким чином відношення сумісності є відношенням толерантності (в розумінні, наприклад, [4, гл. 3, § 1, с. 80]. Також очевидно, що порожнє відношення сумісне з довільним відношенням – $\varepsilon \approx U$, оскільки обмеження зберігає порожню множину [5, твердження 1.11, п. 3].

Властивості 1), 3), 7) випливають з зображення (1) та відповідних властивостей повного образу; властивості 2), 4), 5) перевіряються безпосередньо; далі зупинимось на доведенні властивості 6).

Почнемо з леми про зв'язок між функціональністю та ін'єктивністю.

Лема 1 (зв'язок між функціональністю та ін'єктивністю, критерій функціональності). Відношення U є функціональним $\Leftrightarrow$ обмеження вигляду $I_1^2 \mid U$ є ін'єктивним. □

Доведення. Необхідність встановимо від супротивного: нехай відношення U функціональне, але обмеження $I_1^2 \mid U$ не є ін'єктивним. Тоді існують різні пари $< x, y >, < x', y' > \in U$, такі, що $x = x'$. Отже, $y \neq y'$, що суперечить функціональності відношення U. ▫

Достатність доводиться аналогічно. ▫□

Наслідок 1. (достатня умова дистрибутивності проекції за першою компонентою відносно різниці функцій) Виконується імплікація

$$f \approx g \Rightarrow dom(f \setminus g) = dom(f) \setminus dom(g). \square$$

Доведення. Нехай $f \approx g$, тоді згідно з [2, підрозд. 2.7, лема 2.7.1, с. 49] відношення $f \bigcup g$ функціональне. Значить, з огляду на попередню лему 1 обмеження $I_1^2 \Big| (f \bigcup g)$ є ін'єктивним. Залишається застосувати достатню умову дистрибутивності повного образу відносно різниці (5, твердження 1.3, п. 3) та зображення (1):

$$\begin{aligned} &dom(f \setminus g) = I_1^2[f \setminus g] = I_1^2[f] \setminus I_1^2[g] = \\ &= dom(f) \setminus dom(g) \end{aligned}. \square$$

Далі буде показано, що імплікація останнього наслідку обертається. Почнемо з узагальнення доведеного наслідку 1 для відношень.

Твердження 1 (критерій дистрибутивності проекції за першою компонентою відносно різниці відношень). Виконується еквівалентність $U \mid X \subseteq V \Leftrightarrow \pi_1^2(U \setminus V) = \pi_1^2 U \setminus \pi_1^2 V$, де $X \overset{def}{=} \pi_1^2 U \bigcap \pi_1^2 V$. □

Доведення почнемо з необхідності. Отже, нехай $U \mid X \subseteq V$, встановимо рівність $\pi_1^2(U \setminus V) = \pi_1^2 U \setminus \pi_1^2 V$, тобто, враховуючи зображення (1), – рівність $I_1^2[U \setminus V] = I_1^2[U] \setminus I_1^2[V]$.

Скористатися достатньою умовою дистрибутивності повного образу відносно різниці, як було зроблено в доведенні попереднього наслідку 1, не можна, оскільки, згідно з лемою 1, для цього потрібна функціональність відношення $U \bigcup V$, що не виконується в загальному випадку. Тому проведемо пряме доведення.

Згідно з нижньою оцінкою повного образу різниці [5, п. 7 твердження 1.2] виконується включення $I_1^2[U \setminus V] \supseteq I_1^2[U] \setminus I_1^2[V]$; таким чином, залишається встановити обернене включення $I_1^2[U \setminus V] \subseteq I_1^2[U] \setminus I_1^2[V]$.

Отже нехай $x \in I_1^2[U \setminus V]$, тоді існує елемент y, такий, що $<x,y>\in U, <x,y>\notin V$. Звідси випливає, що $x \in I_1^2[U]$ і залишається встановити, що $x \notin I_1^2[V]$. Зробимо це від супротивного: нехай $x \in I_1^2[V]$, тоді $x \in I_1^2[U] \bigcap I_1^2[V] = \pi_1^2 U \bigcap \pi_1^2 V = X$; значить, маємо $<x,y>\in U \mid X \subseteq V$, звідки випливає, що $<x,y>\in V$ – прийшли до суперечності. ▫

Достатність встановимо також від супротивного: нехай $\pi_1^2(U \setminus V) = \pi_1^2 U \setminus \pi_1^2 V$, але включення $U \mid X \subseteq V$ не виконується. Звідси випливає існування елементів x, y, таких, що $x \in X = \pi_1^2 U \bigcap \pi_1^2 V$, $<x,y>\in U$, але $<x,y>\notin V$. Значить, $<x,y>\in U \setminus V$, тобто $x \in \pi_1^2(U \setminus V) = \pi_1^2 U \setminus \pi_1^2 V$; таким чином, $x \notin \pi_1^2 V$ – прийшли до суперечності. ▫

Наслідок 2 (характеристична властивість відношення сумісності, достатня умова дистрибутивності проекції за першою компонентою відносно різниці).

Виконується еквівалентність

$$U \approx V \Leftrightarrow \pi_1^2(U \setminus V) = \pi_1^2 U \setminus \pi_1^2 V \,\&\, \pi_1^2(V \setminus U) = \pi_1^2 V \setminus \pi_1^2 U.$$

Доведення. Як і раніше позначимо $X \overset{def}{=} \pi_1^2 U \bigcap \pi_1^2 V$. З властивостей обмеження випливає наступна проста еквівалентність

$$U \mid X \subseteq V \Leftrightarrow U \mid X \subseteq V \mid X. \quad (2)$$

Дійсно, з спадності обмеження [5, твердження 1.11, п. 6] тривіально випливає імплікація $U \mid X \subseteq V \mid X \Rightarrow U \mid X \subseteq V$, а обернена імплікація випливає з монотонності та ідемпотентності обмеження [5, твердження 1.11, пп. 1, 5]; до обох частин включення $U \mid X \subseteq V$ треба просто застосувати обмеження за множиною X.

Маючи еквівалентність (2), встановимо необхідність. Нехай $U \approx V$, тоді за означенням відношення сумісності виконується рівність $U \mid X = V \mid X$, тобто $U \mid X \subseteq V \mid X$ та навпаки $U \mid X \supseteq V \mid X$. Залишається застосувати еквівалентність (2) та твердження 1 (критерій дистрибутивності проекції за першою компонентою відносно різниці). ▫

Встановимо достатність. Нехай $\pi_1^2(U \setminus V) = \pi_1^2 U \setminus \pi_1^2 V$ та $\pi_1^2(V \setminus U) = \pi_1^2 V \setminus \pi_1^2 U$. З твердження 1 випливає, що $U \mid X \subseteq V$ та $V \mid X \subseteq U$; отже, враховуючи еквівалентність (2), маємо $U \mid X \subseteq V \mid X$ та $V \mid X \subseteq U \mid X$, тобто $U \mid X = V \mid X$; залишається просто скористатися означенням відношення сумісності. ▫

З останнього наслідку випливає, зокрема, наслідок 1 та його наступне узагальнення, що полягає у встановленні оберненої імплікації.

Наслідок 1'. (характеристична властивість відношення сумісності функцій). Виконується еквівалентність

$$f \approx g \;\Leftrightarrow\; dom(f \setminus g) = dom(f) \setminus dom(g).$$

1) Доведення. Виходячи з наслідку 1 та симетричності відношення сумісності досить довести достатність. Отже, нехай $dom(f \setminus g) = dom(f) \setminus dom(g)$; з твердження 1 випливає, що $f \mid X \subseteq g$, де $X \overset{def}{=} domf \bigcap domg$; звідси, з огляду на еквівалентність (2) з доведення наслідку 2, маємо включення $f \mid X \subseteq g \mid X$; залишається застосувати наступну імплікацію

$$f \subseteq g \,\&\, X \subseteq domf \;\Rightarrow\; f \mid X = g \mid X \quad (3)$$

[5, п. 10 твердження 1.11] та врахувати, що функції останнього включення мають однакову область означеності (а саме X): отже $f \mid X = g \mid X$, тобто $f \approx g$.

Як бачимо, характеристична властивість сумісності функцій (наслідок 1′) виглядає більш просто ніж для відношень загального виду (наслідок 2); справа в тому, що саме для функцій виконується імплікація (3). Зауважимо також, що прості приклади та врахування твердження 1 (критерій дистрибутивності проекції за першою компонентою відносно різниці відношень) показують: спростити наслідок 2, вилучаючи один з членів кон'юнкції в правій частині, не можна.

Наступне твердження 2 є аналогом твердження 1 та наслідку 2 для проекції (за першою компонентою) перетину відношень (точніше кажучи, аналогом для дистрибутивності проекції за першою компонентою відносно перетинів). В доведенні будуть потрібні дві наступні леми (причому лема 2 використовується для доведення леми 3). Далі всюди для спрощення запису повні образи сінглтонів $\{x\}$ будемо позначати через $U[x]$.

Лема 2. Виконуються такі твердження:

1) $U = \bigcup\limits_{x\in\pi_1^2 U}\{x\}\times U[x]$;

2) $U \neq V \,\&\, \pi_1^2 U = \pi_1^2 V \Rightarrow \Rightarrow \exists x(x\in\pi_1^2 U \,\&\, U[x]\neq V[x])$. □

Доведення. Перший пункт перевіряється безпосередньо, а другий випливає з першого (формальне доведення проводиться від супротивного)[1]. □

Другий пункт доведеної леми має таку змістовну інтерпретацію: якщо різні відношення мають однакові проекції за першою компонентою, то існує елемент цієї проекції, на якому відношення „розрізняються”, цілком зрозуміло також, що імплікація другого пункту не обертається.

Лема 2.3 (критерій сумісності відношень). Виконується еквівалентність $U\approx V \Leftrightarrow U\approx U\setminus V \,\&\, U\approx V\setminus U$. □

Доведення. Почнемо з необхідності. Нехай $U\approx V$, спочатку покажемо, що $U\approx U\setminus V$. З наслідку 2 випливає рівність $\pi_1^2(U\setminus V)=\pi_1^2 U\setminus\pi_1^2 V$; таким чином, $\pi_1^2 U \bigcap \pi_1^2(U\setminus V)=\pi_1^2 U\setminus\pi_1^2 V$. Отже, позначаючи $X \overset{def}{=} \pi_1^2 U\setminus\pi_1^2 V$, треба перевірити рівність $U\,|\,X=(U\setminus V)\,|\,X$. Дійсно, використовуючи дистрибутивність обмеження відносно об’єднань [5, твердження 1.11, п. 8)], маємо

$$U\,|\,X=(U\setminus V\bigcup U\bigcap V)\,|\,X= =(U\setminus V)\,|\,X\bigcup(U\bigcap V)\,|\,X.$$

Тепер, виходячи з критерію порожності обмеження [5, твердження 1.11, п. 3)] та загальних властивостей проекції, покажемо, що другий доданок правої частини останньої рівності насправді порожній; дійсно:

$$\pi_1^2(U\bigcap V)\bigcap X\subseteq \pi_1^2 U\bigcap\pi_1^2 V\bigcap X= =\pi_1^2 U\bigcap\pi_1^2 V\bigcap(\pi_1^2 U\setminus\pi_1^2 V)=\varnothing.$$

Шукана рівність $U\,|\,X=(U\setminus V)\,|\,X$ встановлена, а з нею і твердження $U\approx U\setminus V$. ▫

[1] Зауважимо, що рівність першого пункту виконується і для порожнього відношення U (з використанням стандартної домовленості про об’єднання за порожньою множиною індексів $\bigcup\limits_{i\in I}A_i=\varnothing$, якщо $I=\varnothing$).

Друге твердження $U\approx V\setminus U$ встановлюється аналогічно (треба скористатися тим фактом, що згідно з наслідком 2 проекції за першою компонентою відношень U та $V\setminus U$ взагалі не перетинаються за умови $U\approx V$). ▫

Доведемо достатність від супротивного. Нехай $U\approx U\setminus V$ та $U\approx V\setminus U$, але відношення U, V не сумісні. Тоді, $U\,|\,X\neq V\,|\,X$, де $X\overset{def}{=}\pi_1^2 U\cap\pi_1^2 V$. Згідно з п. 2 леми 2 існує елемент x_0, такий, що $x_0\in X$, причому $U[x_0]\neq V[x_0]$. Оскільки множини $U[x_0],V[x_0]$ не рівні, то можливі три наступних випадки. В перших двох випадках ці множини порівнювані (відносно теоретико-множинного включення), в третьому – непорівнювані.

1. $U[x_0]\subset V[x_0]$. Оскільки множина $U[x_0]$ непорожня, то існують елементи y_0,z_0, такі, що $y_0\in U[x_0]$, $z_0\in V[x_0]\setminus U[x_0]$ (див. рис. 1). Покладемо $X'\overset{def}{=}\pi_1^2 U\cap\pi_1^2(V\setminus U)$. З належностей $<x_0,y_0>\in U$, $<x_0,z_0>\in V\setminus U$ випливає, що $x_0\in X'$.

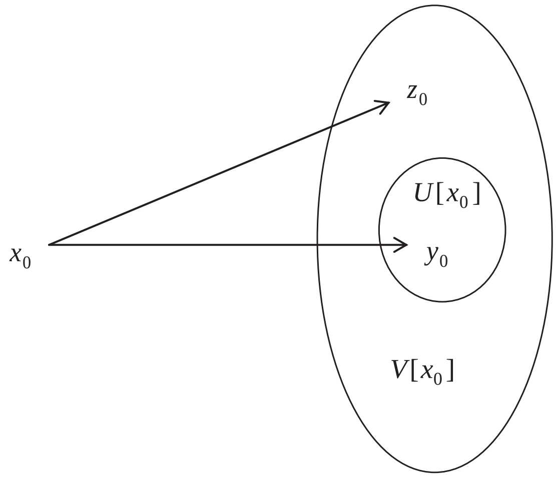

Рис. 1. До п. 1 доведення достатності леми 3

Ідея подальшого доведення полягає у тому, що відношення $U,V\setminus U$, всупереч їхній сумісності, „ведуть себе по-різному” на елементі x_0.

Тепер використовуючи, що $U\approx V\setminus U$, прийдемо до суперечності в першому випадку. Дійсно, $<x_0,y_0>\in U$, де $x_0\in X'$, тобто $<x_0,y_0>\in U\,|\,X'$. З сумісності $U\approx V\setminus U$ та означення множини X' випливає належність $<x_0,y_0>\in(V\setminus U)\,|\,X'$. Тим більше

$<x_0, y_0> \in V \setminus U$, звідки $<x_0, y_0> \notin U$ – суперечність. ▫

2. $V[x_0] \subset U[x_0]$ (відношення U і V міняються ролями). Оскільки множина $V[x_0]$ непорожня, то існують елементи y_0, z_0, такі, що $y_0 \in V[x_0]$, $z_0 \in U[x_0] \setminus V[x_0]$ (див. рис. 2). Покладемо $X'' \overset{def}{=} \pi_1^2 U \cap \pi_1^2 (U \setminus V)$; оскільки проекція монотонна, то очевидно, що $X'' \overset{def}{=} \pi_1^2 (U \setminus V)$. З належності $<x_0, z_0> \in U \setminus V$, випливає, що $x_0 \in X''$.

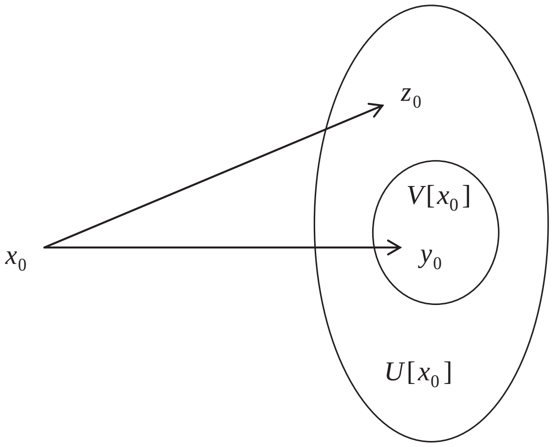

Рис. 2. До п. 2 доведення достатності леми 3

Ідея подальшого доведення полягає у тому, що відношення $U, U \setminus V$, всупереч їх сумісності, „ведуть себе по-різному" на елементі x_0.

Використовуючи, що $U \approx U \setminus V$, прийдемо до протиріччя в другому випадку, що розглядається. Дійсно, $<x_0, y_0> \in U$, де $x_0 \in X''$, тобто $<x_0, y_0> \in U \mid X''$. З сумісності $U \approx U \setminus V$ та означення множини X'' випливає належність $<x_0, y_0> \in (U \setminus V) \mid X''$. Тим більше $<x_0, y_0> \in U \setminus V$, звідки $<x_0, y_0> \notin V$ – протиріччя. ▫

3. $U[x_0] \setminus V[x_0] \neq \varnothing$ и $V[x_0] \setminus U[x_0] \neq \varnothing$. Тоді існують елементи y_0, z_0, такі, що $y_0 \in U[x_0] \setminus V[x_0]$, $z_0 \in V[x_0] \setminus U[x_0]$ (див. рис. 3). Покладемо $X''' \overset{def}{=} \pi_1^2 U \cap \pi_1^2 (V \setminus U)$.

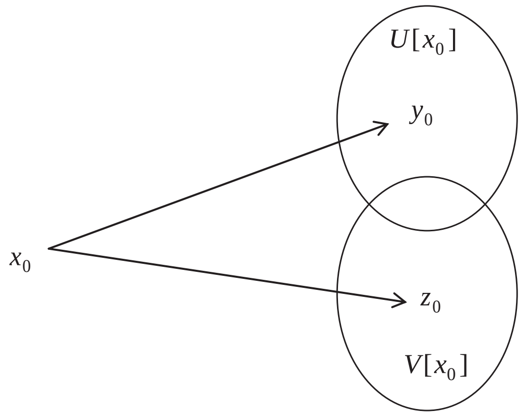

Рис. 3. До п. 3 доведення достатності леми 3

Оскільки $<x_0, y_0> \in U \setminus V$, то $x_0 \in \pi_1^2 (U \setminus V) \subseteq \pi_1^2 U$; аналогічно, оскільки $<x_0, z_0> \in V \setminus U$, то $x_0 \in \pi_1^2 (V \setminus U)$. Отже $x_0 \in X'''$.

Ідея подальшого доведення полягає у тому, що відношення $U, V \setminus U$, всупереч їхньої сумісності, „ведуть себе по-різному" на елементі x_0.

Використовуючи умову $U \approx V \setminus U$, прийдемо до протиріччя в третьому випадку, що розглядається. Дійсно, $<x_0, y_0> \in U$, де $x_0 \in X'''$, тобто $<x_0, y_0> \in U \mid X'''$. З сумісності $U \approx V \setminus U$ та означення множини X''' випливає належність $<x_0, y_0> \in (V \setminus U) \mid X'''$. Тим більше $<x_0, y_0> \in V \setminus U$, звідки $<x_0, y_0> \notin U$ – суперечність. ▫□

Твердження 2 (достатня умова дистрибутивності проекції відносно перетину відношень, характеристична ознака відношення сумісності функцій, критерій дистрибутивності проекції відносно перетину функцій). Для відношень виконується імплікація $U \approx V \Rightarrow \pi_1^2 (U \cap V) = \pi_1^2 U \cap \pi_1^2 V$, яка в загальному випадку не обертається. Для функцій виконується еквівалентність $f \approx g \Leftrightarrow dom(f \cap g) = domf \cap domg$ [2]. □

Доведення. Почнемо з імплікації для відношень, нехай відношення сумісні – $U \approx V$. З леми 3 випливає, що тоді і $U \approx U \setminus V$. Використовуючи наслідок 2 та очевидні теоретико-множинні співвідношення, маємо ланцюжок рівностей:

[2] Отже, перша імплікація обертається тільки для функцій.

$$\pi_1^2(U\cap V)=\pi_1^2(U\setminus(U\setminus V))=\pi_1^2U\setminus\pi_1^2(U\setminus V)= \\ =\pi_1^2U\setminus(\pi_1^2U\setminus\pi_1^2V)=\pi_1^2U\cap\pi_1^2V. \quad \square$$

Тепер наведемо приклад, коли встановлена імплікація не обертається. Нехай x,y,z,t – попарно різні елементи, покладемо $U\stackrel{def}{=}\{<x,y>,<x,t>\}$ та $V\stackrel{def}{=}\{<x,z>,<x,t>\}$ (рис. 4). Очевидно, що ці відношення несумісні, але $\pi_1^2(U\cap V)=\pi_1^2U\cap\pi_1^2V=\pi_1^2U=\pi_1^2V=\{x\}$. $\square$

Нарешті покажемо, що для функцій імплікація обертається, тобто $dom(f\cap g)=domf\cap domg\Rightarrow f\approx g$. Очевидно, що $f\cap g$ – функція, причому $f\cap g\subseteq f$ та $f\cap g\subseteq g$. З наступної імплікації $f\subseteq g\Rightarrow f=g\,|\,domf$, [5, п. 10 твердження 1.11] випливає, що $f\cap g=f\big|dom(f\cap g)=g\big|dom(f\cap g)$. Але $dom(f\cap g)=domf\cap domg$, отже, $f\big|(dom(f)\cap dom(g))=g\big|(dom(f)\cap dom(g))$, тобто $f\approx g$. $\square$

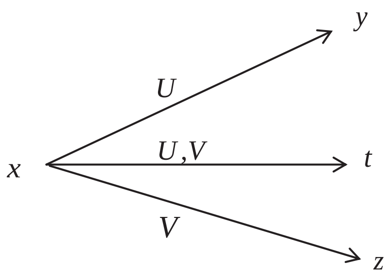

Рис. 4. Приклад несумісних відношень U,V, таких, що $\pi_1^2(U\cap V)=\pi_1^2U\cap\pi_1^2V$

Висновки

В роботі розглянуто теоретико-множинні конструкції, а саме проекцію та відношення сумісності. Встановлено критерій дистрибутивності проекції за першою компонентою відносно різниці відношень, характеристичну властивість відношення сумісності, достатню умову дистрибутивності проекції за першою компонентою відносно різниці, характеристичну властивість відношення сумісності функцій, достатню умову дистрибутивності проекції відносно перетину відношень, характеристичну ознаку відношення сумісності функцій, критерій дистрибутивності проекції відносно перетину функцій.

Список використаних джерел

1. *Buy D.* Formalization of model entity-relationship / D. Buy, L. Silveystruk // Kyiv: Publishing center "Kyiv University", 2011. – 176 p. (in Ukrainian).

2. Relational databases : tabular algebra and SQL-like language / VN Red'ko , Yu.Y. Bronte, DB Bui , SA Polyakov. - Kyiv : Publishing House " Akademperiodika " 2001. - 198 p. (in Ukrainian).

3. A.I. Maltsev Algorithms and functions rekursyvnыe / A.I. Maltsev. – Moscow : Nauka, 1965. - 391 p. (in Russian).

4. J.A. Schroeder Equality , similarity , order / YA Schrader . - Moscow : Nauka, 1971. – 255 p. (in Russian).

5. Kahuta N.D Applications of set-theoretic constructions of whole image, restrictions, confinality and consistency in tabular databases: Dissertation of candidate of physical and mathematical sciences : 01.05.03 – Mathematical and software of computers and systems / Kahuta Nadezhda Dmitrievna. - Kyiv , 2010. – 116 p. (in Ukrainian).

Надійшла до редколегії 17.06.13