

УНІВЕРСИТЕТ ЕКОНОМІКИ ТА ПРАВА «КРОК»
Коледж економіки, права та інформаційних технологій
Циклова комісія з математики

КАСЯНЮК М.В, ФІЛІМОНОВА Т.О.
МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПРАКТИЧНИХ РОБІТ З ДИСЦИПЛІНИ
«ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ»
(для студентів спеціальностей 121 «Інженерія програмного
забезпечення» та 122 «Комп'ютерні науки»)

Київ - 2019

УДК 512.64(075.8)+514.12(075.8)

Розглянуто на засіданні циклової комісії з математики протокол № 1 від «28» серпня 2019 р. Рекомендовано до видання методичною радою Коледжу економіки, права та інформаційних технологій Університету економіки та права «КРОК» протокол №1 від «30» серпня 2019 р.

Автори: 1. М.В. Касянюк, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичних методів та статистики Навчально-наукового інституту інформаційних та комунікаційних технологій «Університету економіки та права «КРОК». 2. Т.О. Філімонова, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри комп'ютерних наук Навчально-наукового інституту інформаційних та комунікаційних технологій «Університету економіки та права «КРОК».

[Текст]: Методичні рекомендації та завдання для практичних робіт з дисципліни «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» / [Автори: М.В. Касянюк, Т.О. Філімонова]; Університет економіки та права «КРОК» – Київ – 2019. – 31 с.

Методичні рекомендації та завдання для практичних робіт містять завдання з основних тем навчальної дисципліни «Лінійна алгебра та аналітична геометрія», відповіді до них і приклади варіантів підсумкової контрольної роботи.

Приведені матеріали також зазначають порядок та особливості виконання практичних завдань студентами спеціальностей 121 «Інженерія програмного забезпечення» та 122 «Комп'ютерні науки», критерії оцінювання їх знань за результатами робіт.

РОЗГЛЯНУТО І СХВАЛЕНО

Педагогічною радою Коледжу економіки, права та інформаційних технологій.

Протокол № 1 від «30» серпня 2019 р.

УДК 512.64(075.8)+514.12(075.8)

©Касянюк М.В. 2019 р.

©Філімонова Т.О. 2019 р.

© Коледж економіки, права
та інформаційних технологій

©Університет економіки та права «КРОК» 2019

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
КРИТЕРІЇ ОЦІНКИ ВИКОНАННЯ ПРАКТИЧНОЇ РОБОТИ.....	5
РОЗДІЛ 1. Матриці та визначники.....	6
Тема 1. Елементи теорії матриць.....	6
Тема 2. Визначники.....	7
Тема 3. Обернена матриця та ранг матриці.....	8
РОЗДІЛ 2. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь.....	9
Тема 4. Загальна теорія систем лінійних рівнянь. Основні поняття та означення.....	9
Тема 5. Правило Крамера та матричний метод.....	9
Тема 6. Метод Гаусса та Жордана-Гаусса.....	10
РОЗДІЛ 3. Елементи векторного аналізу.....	12
Тема 7. Вектори на площині та у просторі.....	12
Тема 8. Розмірність та базис векторного простору.....	13
Тема 9. Лінійні оператори. Власні числа та вектори лінійного оператора.....	14
РОЗДІЛ 4. Аналітична геометрія.....	16
Тема 10. Пряма лінія на площині.....	16
Тема 11. Площина в просторі.....	18
Тема 12. Рівняння прямої в просторі.....	19
Тема 13. Лінії другого порядку.....	20
Тема 14. Поверхні другого порядку.....	22
Приклад завдань для підсумкової контрольної роботи.....	25
Список рекомендованої літератури.....	29

ВСТУП

Математична підготовка фахівців займає чільне місце в сучасній освіті.

Математика у свідомості студентів, магістрів, аспірантів та й самих викладачів, управлінських працівників повинна бути не просто стрункою системою знань, що відірвана від життєвих завдань суспільства, а повноправним методом дослідження, нерозривно зв'язаним із проблемами управління технічними і економічними процесами, проблемами найефективнішого використання природних та економічних ресурсів, могутньою зброєю пізнання навколишнього світу.

В Україні на вагу золота повинні цінуватися ті фахівці, які досконало оволоділи елементами прикладної математики і не є вузькими ремісниками, а творцями у своїй справі. Такому спеціалістові, поряд з математикою, потрібні й глибокі знання предметної галузі.

Стрижневою дисципліною математичного блоку є дисципліни «Математичний аналіз», «Лінійна алгебра та аналітична геометрія». На їх основі базуються усі інші дисципліни (теорія ймовірностей та математична статистика, диференціальні рівняння, дискретна математика тощо).

Методичні рекомендації для виконання практичних завдань з лінійної алгебри та аналітичної геометрії написані згідно з вимогами програми даної дисципліни. Посібник містить 4 розділи, 14 тем. Кожна тема містить вправи для самостійної роботи студентів. Наводяться зразки контрольних робіт. Така структура дає можливість студентам працювати як під керівництвом викладача, так і самостійно опрацьовувати матеріал, оскільки всі вправи мають відповіді. При підготовці цього методичних рекомендацій використані матеріали [1-25].

КРИТЕРІЇ ОЦІНКИ ВИКОНАННЯ ПРАКТИЧНОЇ РОБОТИ

Практична робота оцінюється від 0 до 10 балів.

Бали	Критерії
10	Отримано правильну відповідь з обґрунтуванням усіх ключових етапів розв'язування.
8	Отримано правильну відповідь. Наведено логічно правильну послідовність кроків розв'язування. Деякі з ключових моментів розв'язування обґрунтовано недостатньо. Можливі описки в обчисленнях або перетвореннях, які не впливають на правильність відповіді.
5	У правильній послідовності ходу розв'язування відсутні деякі етапи. Деякі з ключових моментів розв'язування обґрунтовано недостатньо. Можливі помилки в обчисленнях або перетвореннях, які впливають на подальший хід розв'язування. Отримана відповідь може бути неправильною або неповною.
3	У правильній послідовності розв'язування відсутні деякі етапи. Ключові моменти розв'язування не обґрунтовано. Отримана відповідь неправильна або задача розв'язана неповністю.
0	Студент не приступав до розв'язування задачі або приступив до розв'язування задачі, але його записи не відповідають зазначеним критеріям оцінювання завдань в 10, 8, 5, 3 бали.

РОЗДІЛ 1. Матриці та визначники

Тема 1. Елементи теорії матриць

1. Знайти матрицю $AB - BA$:

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix};$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$3) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Відповідь: } 1) \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 12 & -4 \end{pmatrix}; 2) \begin{pmatrix} 4 & 1 & 9 \\ -2 & -6 & 3 \\ -8 & -9 & 2 \end{pmatrix}; 3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Піднести матриці до степеня:

$$1) \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2; 2) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}^2; 3) \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}^2.$$

$$\text{Відповідь: } 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; 2) \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}; 3) \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & c^2 & 0 \\ 0 & 0 & d^2 \end{pmatrix}.$$

3. Знайти добуток матриць:

$$1) \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix};$$

$$2) \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix};$$

$$3) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 \\ -4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix};$$

$$4) \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix};$$

$$5) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (4 \ 0 \ -2 \ 3 \ 1).$$

$$\text{Відповідь: 1) } \begin{pmatrix} -9 & 13 \\ 15 & 4 \end{pmatrix}; 2) \begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix}; 3) \begin{pmatrix} 31 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix}, 4) \begin{pmatrix} 56 \\ 69 \\ 17 \end{pmatrix},$$

$$5) \begin{pmatrix} 12 & 0 & -6 & 9 & 3 \\ 4 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & 2 & -3 & -1 \\ 20 & 0 & -10 & 15 & 5 \\ 8 & 0 & -4 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тема 2. Визначники

1. Обчислити визначники:

$$1) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}; 2) \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}; 3) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}; 4) \begin{vmatrix} a+2 & a^2 \\ a & a^2 - 2a + 4 \end{vmatrix};$$

$$5) \begin{vmatrix} \operatorname{tg} \alpha & -1 \\ 1 & \operatorname{ctg} \alpha \end{vmatrix}; 6) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}; 7) \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}; 8) \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix};$$

$$9) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}; 10) \begin{vmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & -10 & 3 \end{vmatrix}.$$

Відповідь: 1)10; 2)-20; 3)-4; 4)8; 5)2; 6)35; 7)12; 8) 4; 9)-8; 10)120.

2. Обчислити визначники, користуючись їх властивостями:

$$1) \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & -a \end{vmatrix}; 2) \begin{vmatrix} a & 0 & -c \\ 0 & -a & -b \\ b & c & 0 \end{vmatrix}; 3) \begin{vmatrix} ab & a^2 + b^2 & 1 \\ ac & a^2 + c^2 & 1 \\ ad & a^2 + d^2 & 1 \end{vmatrix};$$

$$4) \begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & 1 \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta & 1 \\ \sin^2 \gamma & \cos^2 \gamma & 1 \end{vmatrix}; 5) \begin{vmatrix} -\sin \alpha & \cos \alpha & \sin \alpha \\ \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}.$$

Відповідь: 1) $-20a^2$; 2) 0; 3) $a(b-d)(c-d)(c-b)$; 4) 0; 5) $-\cos 2\alpha$.

3. Обчислити визначники.

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}; 2) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}; 3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Відповідь: 1) 900; 2) -160 ; 3) -24.

Тема 3. Обернена матриця та ранг матриці

1. Знайти обернену матрицю до матриць:

$$1) \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}; 2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; 3) \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix};$$

$$4) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}; 5) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; 6) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Відповідь: } 1) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}; 2) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; 3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}.$$

$$4) \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}; 5) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 31 & -19 & 3 & -4 \\ -23 & 14 & -2 & 3 \end{pmatrix}; 6) \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Визначити ранг матриці:

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}; 2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}; 3) \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; 4) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 5 \end{pmatrix};$$

$$5) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}; 6) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}; 7) \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: 1) 1; 2) 2; 3) 2; 4) 3; 5) 2; 6) 4; 7) 3.

РОЗДІЛ 2. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Тема 4. Загальна теорія систем лінійних рівнянь. Основні поняття та означення

Дослідити на сумісність систему і знайти розв'язок:

$$1) \begin{cases} \sqrt{3}x - 3y = \sqrt{3}, \\ x - \sqrt{3}y = 1. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \sqrt{5}x - 5y = \sqrt{5}, \\ x - \sqrt{5}y = 5. \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 2x - y + z = -2, \\ x + 2y + 3z = -1, \\ x - 3y - 2z = 3. \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x + 2y - 4z = 1, \\ 2x + y - 5z = -1, \\ x - y - z = -2. \end{cases} \quad 5) \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22. \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -7. \end{cases} \quad 7) \begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8. \end{cases}$$

Відповіді: 1) $x = 1 + \sqrt{3}t; y = t$; 2) система несумісна; 3) система несумісна;

4) $x = -1 + 2t; y = 1 + t; z = t$; 5) $x_1 = -1; x_2 = 3; x_3 = -2; x_4 = 2$;

6) $x_1 = 0; x_2 = 2; x_3 = \frac{1}{3}; x_4 = -\frac{3}{2}$;

7) $x_1 = t; x_2 = -13 + 3t; x_3 = -7; x_4 = 0$.

Тема 5. Правило Крамера та матричний метод

1. Розв'язати систему лінійних рівнянь за формулами Крамера:

$$1) \begin{cases} 14x + 4y + 6z = 30, \\ 5x - 3y + 2z = 15, \\ 10x - 11y + 5z = 36. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x - y + z = 2, \\ 3x + 2y + 2z = -2, \\ x - 2y + z = 1. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 3x - 5y + 3z = 1, \\ x + 2y + z = 4, \\ 2x + 7y - z = 8. \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 7x + 3y - 6z = -1, \\ 7x + 9y - 9z = 5, \\ 2x - 4y + 9z = 28. \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 2x + y - 5z = -1, \\ x + 2y - 4z = 1, \\ x - y - z = -2. \end{cases} \quad 6) \begin{cases} x + 2y + 3z = -1, \\ x - 3y - 2z = 3, \\ 2x - y + z = -2. \end{cases}$$

Відповідь: 1) $x = 2, y = -1, z = 1$; 2) $x = 2, y = -1, z = -3$;
 3) $x = 1, y = 1, z = 1$; 4) $x = 2, y = 3, z = 4$;
 5) $x = 2z - 1, y = z + 1, z \in R$; 6) Система розв'язків не має.

2. Розв'язати матричним методом системи рівнянь:

$$1) \begin{cases} x + 2y - z = -3, \\ 3x + 4y + z = 1, \\ 5x + y - 3z = -2. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x - 2y + 3z = -5, \\ 4x + 2y - 3z = 0, \\ 3x - 3y + 5z = -9. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 3x + 2y + z = 5, \\ 2x - y + z = 6, \\ x + 5y = -3. \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 2x - y + z = 5, \\ 3x + 4y - 2z = -3, \\ x - 3y + z = 4. \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 4x + y + 4z = -2, \\ x + y + 2z = -1, \\ 2x + y + 2z = 0. \end{cases} \quad 6) \begin{cases} x - 4y = -5, \\ 2x - 3y + z = -7, \\ x + 4y + 2z = -1. \end{cases}$$

Відповідь: 1) $x = 1, y = -1, z = 2$; 2) $x = 2, y = -1, z = 1$;
 3) $x = 2, y = -1, z = 1$; 4) $x = 1, y = 0, z = 3$; 5) $x = 1, y = 2, z = -2$;
 6) $x = -1, y = 1, z = -2$.

Тема 6. Метод Гаусса та Жордана-Гаусса

1. Розв'язати системи лінійних рівнянь методом Гаусса:

$$1) \begin{cases} x + 2y + 3z = 5, \\ x + 3y + 4z = 6, \\ 2x - y - z = 1. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x - 2y + z = 4, \\ 2x - y + z = 3, \\ 3x + 2y + 2z = 2. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x + y - z = -2, \\ 3x - y + 2z = 9, \\ 4x + 4y - 3z = -5. \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 2x - y + 2z = 5, \\ 4x + 3y - 4z = 7, \\ 4x + 8y - 12z = 3. \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 2x - 3y + 5z = 0, \\ 8x + 2y - z = 21, \\ 2x + 11y - 16z = 21. \end{cases} \quad 6) \begin{cases} x + y + z = 1, \\ 2x + y + 2z = 1, \\ x + y + 3z = 2, \\ x + 3z = 1. \end{cases}$$

Відповідь: 1) $x = 1, y = -1, z = 2$; 2) $x = 0, y = -1, z = 2$;

3) $x = 1, y = 0, z = 3$; 4) система несумісна;

5) $x = \frac{1}{4}(9 - z), y = \frac{1}{2}(3z + 3)$; 6) $x = -\frac{1}{2}, y = 1, z = \frac{1}{2}$.

2. Розв'язати системи лінійних рівнянь методом Гаусса-Жордана:

$$1) \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 6, \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 6, \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 5, \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 7, \\ 4x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 31x_4 = 18. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8. \end{cases}$$

Відповідь: 1) $X_{\text{баз}} = (1/3, 0, 1, 0)$; 2) $X_{\text{баз}} = (0, -2, 1, 0)$;

3) $X_{\text{баз}} = (0, -26/9, 0, -7/9)$. У відповіді наведений один з можливих базисних розв'язків.

РОЗДІЛ 3. Елементи векторного аналізу

Тема 7. Вектори на площині та у просторі

1. Знайти координати векторів \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BA} та їхню довжину.

2. $A(5; -1; 2); B(1; 2; 1); 2) A(4; -5; 2); B(2; -3; 1);$

3. $3) A(7; 3; -2); B(4; 3; 2); 4) A(3; -2; 2); B(-1; 0; 2).$

2. Знайти координати вектора \vec{a} , якщо відомі кути α, β, γ , які він утворює з осями координат Ox, Oy, Oz , і його довжина:

1) $|\vec{a}| = 4, \alpha = 45^\circ, \beta = 60^\circ, \gamma = 120^\circ;$

2) $|\vec{a}| = 8, \alpha = 135^\circ, \beta = 60^\circ, \gamma = 60^\circ;$

3) $|\vec{a}| = 6, \alpha = 120^\circ, \beta = 60^\circ, \gamma = 45^\circ.$

3. Знайти напрямні косінуси вектора \overrightarrow{AB} , якщо $A(2; 3; 4); B(3; 5; 6).$

4. Чи може вектор утворювати з координатними осями кути:

1) $\alpha = 60^\circ, \beta = 120^\circ, \gamma = 45^\circ;$ 2) $\alpha = 45^\circ, \beta = 60^\circ, \gamma = 135^\circ;$

3) $\alpha = 60^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = 30^\circ;$ 4) $\alpha = 120^\circ, \beta = 60^\circ, \gamma = 150^\circ.$

5. Дано точки $A(-1; 5; -10); B(5; -7; 8); C(2; 2; -7); D(5; -4; 2).$

Перевірити, чи колінеарні вектори \overrightarrow{AB} і \overrightarrow{CD} , і встановити, який з них довший від іншого і в скільки разів, як вони напрямлені – в один бік чи в протилежні.

6. Перевірити колінеарність векторів $\vec{a} = (3; -2; 1); \vec{b} = (-9; 6; -3)$ і встановити, який з них довший і в скільки разів.

7. Довжини векторів $|\vec{a}|=4, |\vec{b}| = 5$. Кут між векторами \vec{a} і \vec{b} $\varphi = \frac{2\pi}{3}$.

Обчислити: 1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; 2) \vec{a}^2 , 3) $(\vec{a} + \vec{b})^2$.

8. Відомо, що $|\vec{a}|=3, |\vec{b}| = 5$. При якому значенні α вектори $\vec{a} + \alpha\vec{b}; \vec{a} - \alpha\vec{b}$ будуть взаємно перпендикулярними?

9. Дано вершини чотирикутника $A(2; -1; 2); B(2; 5; 0); C(-3; 2; 1); D(-4; -4; 3)$. Довести, що його діагоналі AC і BD взаємно перпендикулярні.

10. Знайти косинус кута між векторами \vec{a} і \vec{b} , якщо:

$$1) \vec{a} = (1; -2; 2); \vec{b}(-6; 4; 12); 2) \vec{a} = (4; -10; 1); \vec{b}(11; -8; -7).$$

11. Знайти проекцію вектора \vec{a} на вісь вектора \vec{b} , якщо:

$$1) \vec{a} = (5; 2; 5); \vec{b}(2; -1; 2); 2) \vec{a} = (0; 3; -4); \vec{b}(6; 4; 3);$$

$$3) \vec{a} = (1; 2; 3); \vec{b}(-3; 0; 4); 4) \vec{a} = (-3; -2; 0); \vec{b}(1; 2; 2).$$

Відповіді: 3. $\cos \alpha = \frac{1}{3}; \cos \beta = \frac{2}{3}; \cos \gamma = \frac{2}{3}$; 4. 1) може; 2) не може;

5. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$, напрямлені в один бік; 6. Колінеарні, $\vec{b} = -3\vec{a}$.

7. 1)-6; 2) 16; 3) 13; 8. $\alpha = \pm \frac{3}{5}$; 10. 1) $\cos \varphi = \frac{5}{21}$; 2) $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$; 11. 1) 6; 2) 0;

$$3) \frac{9}{5}; 4) -\frac{7}{3}.$$

Тема 8. Розмірність та базис векторного простору

1. Встановити, чи утворюють вектори \vec{a} , \vec{b} і \vec{c} базис на множині всіх векторів, якщо:

$$1) \vec{a} = (2; 3; -1), \vec{b} = (1; -1; 3), \vec{c} = (1; 9; -11);$$

$$2) \vec{a} = (3; -2; 1), \vec{b} = (2; 1; 2), \vec{c} = (3; -1; -2);$$

$$3) \vec{a} = (0; 1; -3), \vec{b} = (1; -3; 4), \vec{c} = (1; -2; 1).$$

2. Довести, що вектори \vec{a} , \vec{b} і \vec{c} утворюють базис, і знайти координати вектора \vec{d} в цьому базисі, якщо:

$$1) \vec{a} = (0; -5; 7), \vec{b} = (3; -2; -1), \vec{c} = (1; 5; 3), \vec{d} = (20; -27; 35);$$

$$2) \vec{a} = (2; 1; -3), \vec{b} = (3; -2; 1), \vec{c} = (-1; 0; -2), \vec{d} = (-2; 2; 1);$$

$$3) \vec{a} = (0; 1; 2), \vec{b} = (-1; 0; 3), \vec{c} = (1; 2; -5), \vec{d} = (0; 3; 0);$$

$$4) \vec{a} = (2; 1; 1), \vec{b} = (1; 2; -2), \vec{c} = (1; 1; 2), \vec{d} = (4; 3; -2);$$

$$5) \vec{a} = (5; 4; 1), \vec{b} = (-3; 5; 2), \vec{c} = (2; -1; 3), \vec{d} = (7; 23; 4);$$

$$6) \vec{a} = (-1; 1; 2), \vec{b} = (2; -3; -5), \vec{c} = (-6; 3; -1), \vec{d} = (28; -19; -7);$$

$$7) \vec{a} = (1; 3; 4), \vec{b} = (-2; 5; 0), \vec{c} = (3; -2; -4), \vec{d} = (13; -5; -4);$$

$$8) \vec{a} = (-3; 0; 1), \vec{b} = (2; 7; -3), \vec{c} = (-4; 3; 5), \vec{d} = (-16; 33; 13);$$

$$9) \vec{a} = (5; 1; 2), \vec{b} = (-2; 1; -3), \vec{c} = (4; -3; 5), \vec{d} = (15; -15; 24);$$

$$10) \vec{a} = (5; 7; -2), \vec{b} = (-3; 1; 3), \vec{c} = (1; -4; 6), \vec{d} = (14; 9; -1).$$

Відповіді: 1. 1) ні; 2) так; 3) ні;

$$2. 1) \vec{d} = 5\vec{a} + 6\vec{b} + 2\vec{c}; 2) \vec{d} = -\vec{b} - \vec{c}; 3) \vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}; 4) \vec{d} = 2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c};$$

$$5) \vec{d} = 3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}; 6) \vec{d} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 4\vec{c}; 7) \vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c};$$

$$8) \vec{d} = 2\vec{a} + 3\vec{b} + 4\vec{c}; 9) \vec{d} = -\vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c}; 10) \vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}.$$

Тема 9. Лінійні оператори. Власні числа та вектори лінійного оператора

1. Знайти власні числа лінійного оператора, заданого у R_3 матрицею A , якщо:

$$1) A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}; 2) A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; 3) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}; 4) A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Довести, що матриці A і A^T (транспонована матриця) мають однакові власні числа.

3. Довести, що визначник матриці дорівнює добутку її характеристичних чисел.

4. Довести, якщо $\lambda \neq 0$ є власним числом матриці A , то $\frac{1}{\lambda}$ – власне число оберненої матриці A^{-1} .

5. Знайти власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею A , якщо:

$$1) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; 2) A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; 3) A = \begin{pmatrix} 2 & 19 & 30 \\ 0 & -5 & -12 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix};$$

$$4) A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 15 & -7 & 4 \end{pmatrix}; 5) A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 7 & -2 & 9 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

6. Довести, якщо лінійний оператор A має обернений A^{-1} , то вони мають одні й ті самі власні вектори.

7. Знайти власні числа та власні вектори лінійних операторів в R_3 , заданих своїми матрицями:

$$1) A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}; 2) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}; 3) A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix};$$

$$4) A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}; 5) A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Відповіді: 1. 1) Дійсних власних чисел немає; 2) $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 3$;
 3) $\lambda_1 = 1$; 4) $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 4$; 5. 1) $(1; 0)t; 0 \neq t \in R$;
 2) $(1; 2)t; (1; 1)s; t, s \in R, t \neq 0, s \neq 0$;
 3) $(1; 0; 0)t; (8; -2; 1)s; (9; -3; 1)k; t, s, k \in R; t \neq 0, s \neq 0, k \neq 0$;
 4) $(0; 0; 1)t; (5; 5; -8)s; t, s \in R; t \neq 0, s \neq 0$;
 5) $(0; 1; 0)t; (15; 8; -9)s; (11; 16; 11)k; t, s, k \in R; t \neq 0, s \neq 0; k \neq 0$;
 7. 1) $\lambda = -1; (1; 1; -1)t; 0 \neq t \in R$;
 2) $\lambda = 2; (1; 2; 0)t + (0; 0; 1)s; |t| + |s| \neq 0; s, t \in R$;
 3) $\lambda_1 = 1; (1; 1; 1)t; 0 \neq t \in R; \lambda_2 = 0; (1; 2; 3)s; 0 \neq s \in R$;
 4) $\lambda = 1; (3; 1; 1)t; 0 \neq t \in R$;
 5) $\lambda_1 = 3; (1; 2; 2)t; 0 \neq t \in R; \lambda_2 = -1; (1; 2; 1)s; 0 \neq s \in R$.

РОЗДІЛ 4. Аналітична геометрія

Тема 10. Пряма лінія на площині

В задачах 1-3:

1) записати рівняння прямої, привести його до загального виду, записати у відрізках на осях та побудувати пряму;

2) знайти відстань від початку координат до прямої.

1. Пряма задана точкою $M_0(x_0; y_0)$ і нормальним вектором $\vec{n} = (A; B)$:

а) $M_0(-1; 2)$, $\vec{n} = (2; 2)$; б) $M_0(2; 1)$, $\vec{n} = (2; 0)$; в) $M_0(1; 1)$, $\vec{n} = (2; -1)$.

2. Пряма задана точкою $M_0(x_0; y_0)$ і напрямним вектором $\vec{s} = (m; n)$:

а) $M_0(-1; 2)$, $\vec{s} = (3; -1)$; б) $M_0(1; 1)$, $\vec{s} = (0; -1)$; в) $M_0(-1; 1)$, $\vec{s} = (2; 0)$.

3. Пряма задана двома точками $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$:

а) $M_1(1; 2)$, $M_2(-1; 0)$; б) $M_1(1; 1)$, $M_2(1; -2)$; в) $M_1(2; 2)$, $M_2(0; 2)$.

4. Визначити кутовий коефіцієнт k і відрізок b , що його відтинає пряма на осі Oy , якщо вона задана рівняннями:

1) $5x - y + 3 = 0$; 2) $2x + 3y - 6 = 0$; 3) $5x + 3y + 2 = 0$; 4) $3x + 2y = 0$.

5. Скласти рівняння прямих, що проходять через точку $M(-2; 4)$ паралельно

1) осі Ox ; 2) Oy .

6. Скласти рівняння прямих, що проходять через точку $M(-2; 4)$ паралельно

1) осі Ox ; 2) Oy .

7. Задано пряму і точку $M(x; y)$.

1) написати рівняння прямої, що проходить через т. $M(x; y)$, перпендикулярно до заданої прямої;

2) написати рівняння прямої, що проходить через т. $M(x; y)$, паралельно до заданої прямої;

3) написати рівняння прямої, що проходить через т. $M(x; y)$, під кутом 45° до заданої прямої, якщо:

а) $y - 2x - 1 = 0$, $M(-1; 2)$; б) $2y + 1 = 0$, $M(1; 0)$;

в) $x + y + 1 = 0$, $M(0; 1)$; г) $2x + 3y + 4 = 0$, $M(2; 1)$.

8. Точка $A(2; -5)$ є вершиною квадрата, одна із сторін якого лежить на прямій $-2y - 7 = 0$. Обчислити площу цього квадрата.

9. Дві сторони квадрата лежать на прямих $3x + 4y - 12 = 0$, $3x + 4y + 13 = 0$. Обчислити його площу.

Відповіді: 1. а) $2(x + 1) + 2(y - 2) = 0$; загальне рівняння $x + y - 1 = 0$; у відрізках на осях $\frac{x}{1} + \frac{y}{1} = 1$, відстань $\frac{1}{\sqrt{2}}$;

б) $2(x - 2) = 0$; загальне рівняння $x - 2 = 0$; у відрізках на осях для даної прямої не існує, відстань 2;

в) $2(x - 1) - (y - 1) = 0$; загальне рівняння $2x - y - 1 = 0$; у відрізках на осях $\frac{x}{\frac{1}{2}} - \frac{y}{1} = 1$, відстань $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

2. а) $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-1}$; загальне рівняння $x + 3y - 5 = 0$; у відрізках на осях $\frac{x}{5} + \frac{y}{\frac{5}{3}} = 1$, відстань $\frac{5}{\sqrt{10}}$;

б) $\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{-1}$; загальне рівняння $x - 1 = 0$; у відрізках на осях для даної прямої не існує, відстань 1;

в) $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{0}$; загальне рівняння $y - 1 = 0$; у відрізках на осях для даної прямої не існує, відстань 1.

3. а) $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{-2}$; загальне рівняння $x - y + 1 = 0$; у відрізках на осях $\frac{x}{-1} + \frac{y}{1} = 1$, відстань $\frac{1}{\sqrt{2}}$;

б) $\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{-3}$; загальне рівняння $x - 1 = 0$; у відрізках на осях не існує, відстань 1;

в) $\frac{x-2}{-2} = \frac{y-2}{0}$; загальне рівняння $y - 2 = 0$; у відрізках на осях не існує, відстань 2;

4. а) $k = 5, b = 3$; б) $k = -\frac{2}{3}, b = 2$; в) $k = -\frac{5}{3}, b = -\frac{2}{3}$; г) $k = -\frac{3}{2}, b = 0$.

5. 1) $y - 4 = 0$; 2) $x + 2 = 0$. 6. $25x + 29y - 21 = 0$.

7. а) $x + 2y - 3 = 0$, $2x - y + 4 = 0$, $3x + y + 1 = 0$ і $x - 3y + 7 = 0$;

б) $x - 1 = 0$, $y = 0$, $x - y - 1 = 0$ і $x + y - 1 = 0$;

в) $x - y - 1 = 0$, $x + y + 1 = 0$, $y^2 + x = 0$ і $x = 0$;

г) $3x - 2y - 4 = 0$, $2x + 3y - 7 = 0$, $x - 5y + 3 = 0$ і $5x + y - 11 = 0$.

8. 5 кв. од. 9. 25 кв. од.

Тема 11. Площина в просторі

1. Задано дві точки: $M_1(3; -1; 2)$ і $M_2(4; -2; -1)$. Скласти рівняння площини, що проходить через т. M_1 перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$.

2. Скласти рівняння площини, що проходить через три задані точки:
1) $M_1(1; 2; 0)$, $M_2(2; 1; 1)$, $M_3(3; 0; 1)$; 2) $M_1(1; 1; 1)$, $M_2(0; -1; 2)$, $M_3(2; 3; -1)$.

3. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M(-1; 2; 3)$ і відтинає від осей Ox та Oy відрізки $a = 2$, $b = -1$.

4. Визначити, при яких значеннях m і n наступна пара рівнянь буде визначати паралельні площини: $mx + 3y - 2z - 1 = 0$ та $2x - 5y - nz = 0$.

5. Визначити, при якому значенні m наступна пара рівнянь буде визначати перпендикулярні площини: $7x - 2y - z = 0$ та $mx + y - 3z - 1 = 0$.

6. З'ясувати взаємне розміщення заданих площин та обчислити косинус кута між ними, якщо:

1) $x - 2y + z - 1 = 0$; $y + 3z - 1 = 0$;

2) $2x - y + z - 1 = 0$; $4x - 2y + 2z + 1 = 0$;

3) $x - y + 1 = 0$; $y - z + 1 = 0$.

4) $2x - y - z + 1 = 0$; $-4x + 2y + 2z - 2 = 0$.

7. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M(1; 0; -1)$ і:

1) паралельна площині $2x - y + 3z = 0$;

2) перпендикулярна до площин $x + 2y + 1 = 0$; $3x - 2y + z - 4 = 0$.

3) точку $M_1(1; -1; 2)$ перпендикулярно до площини $x - 2y + 3z + 5 = 0$.

Відповіді: 1. $x - y - 3z + 2 = 0$; 2. 1) $x + y - 3 = 0$; 2) $2x - y - 1 = 0$;

3. $3x - 6y + 7z - 6 = 0$; 4. $m = -\frac{6}{5}$; $n = -\frac{10}{3}$; 5. $m = -\frac{1}{7}$; 6. 1)

перетинаються, $\cos \varphi = \frac{1}{2\sqrt{15}}$; 2) паралельні, $\cos \varphi = 1$; 3) перетинаються,

$\cos \varphi = \frac{1}{2}$; 4) збігаються, $\cos \varphi = -1$; 7. 1) $2x - y + 3z + 1 = 0$; 2) $2x - y - 8z - 6 = 0$; $3x + 3y + z - 2 = 0$.

Тема 12. Рівняння прямої в просторі

1. Скласти рівняння прямої, що проходить через дві задані точки:

1) $M_1(1; -2; 1)$ і $M_2(3; 1; -1)$; 2) $M_1(3; -1; 0)$ і $M_2(1; 0; -3)$.

2. При якому значенні коефіцієнта A площина $Ax + 2y - z + 5 = 0$ паралельна прямій $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{2}$?

3. Скласти параметричні рівняння прямої, що проходить через точку $A(1; -1; -3)$ паралельно:

1) вектору $\vec{a} = (2; -3; 4)$;

2) прямій $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{0}$;

3) прямій $\begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 2t + 3 \\ z = 5t + 2 \end{cases}$.

4. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(1; -5; 3)$ і утворює з осями координат кути, що відповідно дорівнюють $60^\circ, 45^\circ, 120^\circ$.

5. Обчислити кут, утворений прямими:

$$x + 1 = y - 1 = -(z + 2) \text{ та } \frac{x+5}{6} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{2}.$$

6. Знайти косинус кута між прямими:

$$\begin{cases} 2x - y - 7 = 0 \\ 2x - z + 5 = 0 \end{cases} \text{ та } \begin{cases} 3x - 2y + 8 = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases}.$$

7. Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $A(3; 2; 1)$ на вісь Ox .

8. Задано вершини трикутника $A(1; -2; -4), B(3; 1; -3), C(5; 1; -7)$. Скласти параметричні рівняння його висоти, опущеної із вершини B .

9. Обчислити відстань між паралельними площинами $6x - 18y - 9z - 28 = 0$ та $4x - 12y - 6z - 7 = 0$.

10. Знайти відстань від точки $A(1; -1; 0)$ до прямої, що проходить через точки $B(0; 1; 2), C(-1; 0; 3)$.

Відповіді: 1. 1) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{-2}$; 2) $\frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-3}$; 2. $A = -2$;

$$3. 1) \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - 3t \\ z = -3 + 4t \end{cases}; 2) \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 4t \\ z = -3 \end{cases}; \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 - 2t \\ z = -3 + 5t \end{cases}$$

4. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+5}{\sqrt{2}} = \frac{z-3}{-1}$; 5. $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \frac{\pi}{2}$; 6. $\cos \varphi = \frac{20}{21}$; 7. $\frac{x-3}{0} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{1}$;

$$8. \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + t \\ z = -3 + \frac{7}{3}t \end{cases}; 9. d = \frac{5}{6}; 10. \frac{1}{3}\sqrt{78}.$$

Тема 13. Лінії другого порядку

1. Скласти рівняння кола в таких випадках:

1) центром кола є точка $C(2; -3)$, а радіус $R = 7$;

2) центром кола є точка $C(6; -8)$ і коло проходить через початок координат;

3) точки $A(3; 2), B(-1; 6)$ є кінцями одного з діаметрів кола;

4) коло проходить через три точки $M_1(-1; 5), M_2(-2; 2), M_3(5; 5)$.

2. Встановити, що кожне з рівнянь визначає коло, знайти його центр C та радіус R :

1) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$;

2) $x^2 + y^2 - 8x = 0$;

3) $x^2 + y^2 + 4y = 0$;

4) $2x^2 + 2y^2 - 12x + y + 3 = 0$;

5) $7x^2 + 7y^2 - 2x - 7y - 1 = 0$.

3. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис, симетрично щодо початку координат, якщо:

1) його півосі відповідно дорівнюють 4 і 2;

2) відстань між фокусами $2c = 6$, а більша вісь $2a = 10$;

3) більша вісь $2a = 20$, а ексцентриситет $\varepsilon = 0,8$;

4) менша вісь $2b = 6$, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- 5) Відстань між фокусами $2c = 6$, а ексцентриситет $\varepsilon = 0,6$.
4. Задано рівняння еліпса $25x^2 + 169y^2 = 4225$. Визначити:
- 1) довжину осей; 2) координати фокусів; 3) ексцентриситет.
5. Задано рівняння еліпса $9x^4 + 5y^2 = 45$. Визначити:
- 1) його осі; 2) координати фокусів; 3) ексцентриситет.
6. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розміщені на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо:
- 1) її осі $2a = 10$ і $2b = 8$;
 - 2) відстань між фокусами $2c = 10$ і вісь $2b = 8$;
 - 3) відстань між фокусами $2c = 6$ і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$;
 - 4) вісь $2a = 16$ і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{4}$;
 - 5) рівняння асимптот $y = \pm \frac{4}{3}x$, а відстань між фокусами $2c = 20$.
7. На гіперболі $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ знайти точку, відстань якої від лівого фокуса вдвічі більша, ніж від правого.
8. Знайти ті точки гіперболи $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, що лежать на відстані 7 одиниць від лівого фокуса.
9. Скласти рівняння параболи, якщо вершина її має координати $(-2; 2)$, а параметр $p = 5$, а напрям її осі симетрії збігається:
- 1) з додатнім напрямом осі Ox ;
 - 2) з від'ємним напрямом осі Ox ;
 - 3) з додатнім напрямом осі Oy ;
 - 4) з від'ємним напрямом осі Oy .
10. Встановити, що кожне з рівнянь визначає параболу, знайти координати її вершини C і величину параметра p :
- 1) $y^2 - 4x + 8 = 0$;
 - 2) $x^2 + y - 2 = 0$;
 - 3) $4x^2 - 8x - y + 7 = 0$;
 - 4) $2y^2 - x - 12y + 14 = 0$.

11. Пояснити, яку лінію визначає кожне з рівнянь:

1) $4x^2 - y^2 = 0$;

2) $4x^2 + y^2 = 0$;

3) $3x^2 + y^2 + 2x + 2 = 0$;

4) $y^2 - 16 = 0$.

Відповіді: 1. 1) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 49$; 2) $(x - 6)^2 + (y - 8)^2 = 100$;

3) $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 8$; 4) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$.

2. 1) $C(2; -3), R = -4$; 2) $C(4; 0), R = 4$; 3) $C(0; -2), R = 2$;

4) $C(3; -1/4), R = \frac{11}{4}$; 5) $C(\frac{1}{7}; \frac{1}{2}), R = \frac{9}{14}$.

3. 1) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$; 2) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; 3) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$; 4) $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{409} = 1$;

5) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

4. 1) $2a = 26$; $2b = 10$; 2) $F_1(0; -12), F_2(0; 12)$; 3) $\varepsilon = \frac{12}{13}$.

5. 1) $2a = 2\sqrt{5}$; $2b = 6$; 2) $F_1(0; -2), F_2(0; 2)$; 3) $\varepsilon = \frac{2}{3}$.

6. 1) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$; 2) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$; 3) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$; 4) $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$; 5) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$.

7. $(\frac{48}{5}; \pm \frac{3\sqrt{119}}{5})$. 8. $(-6; \pm 4\sqrt{3})$.

9. 1) $(y - 2)^2 = 10(x + 2)$; 2) $(y - 2)^2 = -10(x + 2)$;

3) $(x + 2)^2 = 10(y - 2)$; 4) $(x + 2)^2 = -10(y - 2)$.

10. 1) $C(2; 0); p = 2$; 2) $C(0; 2); p = \frac{1}{2}$; 3) $C(1; 3); p = \frac{1}{8}$; 4) $C(-4; 3); p = \frac{1}{4}$.

11. 1) пара прямих $y = \pm 2x$; 2) точка $(0; 0)$; 3) уявне коло; 4) пара прямих $y = \pm 4$.

Тема 14. Поверхні другого порядку

1. Скласти рівняння циліндричної поверхні з твірною, паралельною вектору $\vec{s} = (1; 1; 1)$ і напрямною $x^2 + y^2 = 4x, z = 0$.

2. Скласти рівняння циліндра з твірною, паралельною осі Oz , і напрямною – колом $x^2 + y^2 + z^2 = 3, z = 1$.

3. Твірна циліндра паралельна осі Oz , а напрямна – коло $x^2 + y^2 = 2z$,

$x^2 + y^2 + z^2 = 8$. Скласти рівняння циліндра.

4. Твірні циліндра паралельні вектору $\vec{s} = (1; 1; 1)$, його напрямна – коло $x^2 + y^2 = 2z$, $x^2 + y^2 + z^2 = 8$. Скласти рівняння циліндра.

5. Скласти рівняння поверхні, утвореною при обертанні навколо осі Oz лінії:

$$1) \quad z = \frac{1}{x^2}; \quad 2) \quad \frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1; \quad 3) \quad \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25} = 1.$$

6. Пряма $x - 1 = y + 1 = z$ обертається навколо осі Oz . Скласти рівняння поверхні обертання.

7. Скласти рівняння поверхні, яка утворилася при обертанні кола $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ навколо осі Oy .

8. Знайти рівняння поверхонь, які утворилися при обертанні гіперболи $xy = 1$ навколо своїх асимптот.

9. Скласти рівняння конусів, вершина якого лежить у початку координат, а напрямна задана рівняннями:

$$1) \quad x^2 + y^2 = a^2, \quad z = h; \quad 2) \quad x^2 + (y - 6)^2 + z^2 = 25, \quad y = 3.$$

10. Скласти рівняння конуса, вершина якого лежить у початку координат, а напрямна задана рівняннями:

$$1) \quad \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = a; \end{cases} \quad 2) \quad \begin{cases} x^2 - 2z + 1 = 0, \\ y - z + 1 = 0. \end{cases}$$

11. Скласти рівняння конуса, якщо задана його вершина M_0 та рівняння напрямної L :

$$1) \quad M_0(0; 1; 0), \quad L: x^2 = 2y, z = 1; \quad 2) \quad M_0(0; 0; 1), \quad L: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, \quad z = 0.$$

12. Скласти рівняння конуса, утвореного обертанням прямої $y = 5x$ навколо осі Ox .

13. Скласти рівняння сфери з центром у точці $C(x_0; y_0; z_0)$ і радіусом R , якщо:

$$1) \quad C(3; -1; -2), \quad R = 5; \quad 2) \quad C(1; 0; -1), \quad R = 1; \quad 3) \quad C(0; 4; 0), \quad R = 5.$$

14. Визначити координати центра сфери та її радіус, якщо вона задана рівнянням:

1) $x^2 + y^2 + z^2 + 10x - 8y - 6z + 25 = 0$;

2) $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4x - 12y + 16z + 1 = 0$;

3) $x^2 + y^2 + z^2 - 4z - 5 = 0$.

15. Скласти рівняння сфери з центром у точці $C(x_0; y_0; z_0)$, якщо:

1) $C(0; 0; 0)$ і сфера проходить через точку $M(6; -2; 3)$;

2) $C(1; 4; -7)$ і сфера дотикається до площини $6x + 6y - 7z + 42 = 0$;

3) $C(6; -8; 3)$ і сфера дотикається до осі Oz .

16. Встановити тип заданих поверхонь, дослідити форму:

1) $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{25} = 1$; 2) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{36} = 1$;

3) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$; $x^2 + y^2 = -4z$.

17. Знайти лінії перетину поверхні $\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{18} - \frac{z^2}{9} = 1$ з координатними площинами та площинами $z = 2$, $x = 3$.

18. Скласти рівняння нормалі до поверхні $10x^2 + 16y^2 - z^2 = 1$ у точці $M(1; -1; 5)$.

Відповіді: 1. $(x - z)^2 + (y - z)^2 = 4(x - z)$; 2. $x^2 + y^2 = 2$;

3. $x^2 + y^2 = 4$; 4. $(x - z + 2)^2 + (y - z + 2)^2 = 4$;

5. 1) $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$; 2) $\frac{x^2 + y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$; 3) $\frac{x^2 + y^2}{16} + \frac{z^2}{25} = 1$;

6. $\frac{x^2 + y^2}{2} - z^2 = 1$. Вказівка. Точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – довільна точка на прямій

обертання. Тоді $x_0 - 1 = y_0 + 1 = z_0$. Крім того, нехай $M(x; y; z)$ – точка поверхні, що дістали обертанням точки M_0 . В такому разі $z = -z_0$;

$x_0^2 + y_0^2 = x^2 + y^2$. Виключаючи із чотирьох рівнянь три параметри, збудуємо шукане рівняння поверхні.

7. Тор $(x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 = 16(x^2 + z^2)$; 8. $x^2(y^2 + z^2) = 1$ і

$y^2(x^2 + z^2) = 1$; 9.1) $\frac{x^2 + y^2}{a^2} = \frac{z^2}{h^2}$; 2) $9(x^2 + z^2) = 16y^2$; 10. 1) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} =$

0; 2) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$; 11. 1) $x^2 = 2z(y + z - 1)$; 2) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - (z - 1)^2 = 0$;

12. $25x^2 - y^2 - z = 0$; 13. 1) $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z + 2)^2 = 25$;

- 2) $(x - 1)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 1$; 3) $x^2 + (y - 4)^2 + z^2 = 25$;
 14. 1) $C(-5; 4; 3)$, $R = 4$; 2) $C\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -2\right)$, $R = \frac{5}{2}$; 3) $C(0; 0; 2)$, $R = 3$.
 15. 1) $x^2 + y^2 + z^2 = 49$; 2) $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 + (z + 7)^2 = 121$;
 3) $(x - 6)^2 + (y + 8)^2 + (z - 3)^2 = 100$; 16. 1) еліпсоїд;
 2) однопорожнинний гіперболоїд; 3) двопорожнинний гіперболоїд
 обертання; 4) параболоїд обертання; 18. $\frac{x-1}{10} = \frac{y+1}{-16} = \frac{z-5}{-5}$.

Приклад завдань для підсумкової контрольної роботи

Варіант 1

1. Знайти матрицю $AB - BA$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Визначити ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь за формулами Крамера

$$\begin{cases} 2x + y - 5z = -1, \\ x + 2y - 4z = 1, \\ x - y - z = -2. \end{cases}$$

4. Дано вершини чотирикутника $A(-1; 5; -10)$; $B(5; -7; 8)$;
 $C(2; 2; -7)$; $D(5; -4; 2)$. Довести, що його діагоналі AC і BD взаємно перпендикулярні.

5. Визначити кутовий коефіцієнт k і відрізок b , що його відтинає пряма на осі Oy , якщо вона задана рівнянням $5x - y + 3 = 0$.

6. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розміщені на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо відстань між фокусами $2c = 10$ і вісь $2b = 8$.

Варіант 2

1. Знайти матрицю $AB - BA$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Визначити ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

3. Розв'язати матричним методом систему рівнянь

$$\begin{cases} x + 2y - z = -3, \\ 3x + 4y + z = 1, \\ 5x + y - 3z = -2. \end{cases}$$

4. Знайти координати вектора \vec{a} , якщо відомі кути α, β, γ , які він утворює з осями координат Ox, Oy, Oz , і його довжина

$$|\vec{a}| = 4, \alpha = 45^\circ, \beta = 60^\circ, \gamma = 120^\circ.$$

5. Записати рівняння прямої, привести його до загального виду, записати у відрізках на осях, якщо пряма задана точкою $M_0(-1; 2)$, і нормальним вектором $\vec{n} = (2; 2)$.

6. Скласти рівняння кола, якщо центром кола є точка $C(6; -8)$ і коло проходить через початок координат.

Варіант 3

1. Знайти матрицю $AB - BA$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

2. Визначити ранг матриці $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Розв'язати системи лінійних рівнянь методом Гаусса

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 5, \\ x + 3y + 4z = 6, \\ 2x - y - z = 1. \end{cases}$$

4. Довжини векторів $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}| = 5$. Кут між векторами \vec{a} і \vec{b} $\varphi = \frac{2\pi}{3}$.

Обчислити $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

5. Записати рівняння прямої, привести його до загального виду, записати у відрізках на осях, якщо пряма задана точкою $M_0(-1; 2)$ і напрямним вектором $\vec{s} = (3; -1)$.

6. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис, симетрично щодо початку координат, якщо відстань між фокусами $2c = 6$, а більша вісь $2a = 10$.

Варіант 4

1. Піднести матрицю до степеня $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2$.

2. Визначити ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

3. Розв'язати системи лінійних рівнянь методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 5, \\ 4x + 3y - 4z = 7, \\ 4x + 8y - 12z = 3. \end{cases}$$

4. Чи може вектор утворювати з координатними осями кути $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 120^\circ$, $\gamma = 45^\circ$; 2) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 135^\circ$.

5. Скласти рівняння прямих, що проходять через точку $M(-2; 4)$ паралельно
1) осі Ox ; 2) Oy .

6. Задано рівняння еліпса $9x^2 + 5y^2 = 45$. Визначити:

1) його осі; 2) координати фокусів; 3) ексцентриситет.

Варіант 5

1. Піднести матрицю до степеня $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}^2$.

2. Визначити ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь за формулами Крамера

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = -1, \\ x - 3y - 2z = 3, \\ 2x - y + z = -2. \end{cases}$$

4. Знайти косинус кута між векторами \vec{a} і \vec{b} , якщо $\vec{a} = (1; -2; 2)$; $\vec{b} = (-6; 4; 12)$.

5. Скласти рівняння прямих, що проходять через точку $M(-2; 4)$ паралельно
1) осі Ox ; 2) Oy .

6. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розміщені на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо рівняння асимптот $y = \pm \frac{4}{3}x$, а відстань між фокусами $2c = 20$.

Список рекомендованої літератури

Основна

1. Дубовик В.П. Вища математика: Навчальний посібник/ В. П. Дубовик, І. І. Юрик. - К.: А.С.К.: Ігнатекс-Україна, 2011. - 648 с.. - (Вища освіта)
2. Дюженкова Л.І., Дюженкова О.Ю., Михалін Г.О. Вища математика. Приклади і задачі. Посібник.- Київ, Видавничий центр "Академія", 2002.
3. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика., част.1:-Київ, Техніка, 2003.
4. Б.І. Голець, В.Р. Кігель, О.Ю. Пірятинська. Методичний посібник для самостійної роботи студентів: - Вища математика. -К.:ІЕУГП, 1998. - 68с.
5. Вища математика: Збірник задач: Навч. посібник / В.П. Дубовик, І.І. Юрик; За ред. В.П. Дубовика, І.І. Юрика.-К.: А.С.К., 2004.-480 с.
6. Литвин І.І. Вища математика: авчальний посібник/ І. І. Литвин, О. М. Конопчук, Г. О. Желізняк. - 2-ге видання. - К.: Центр учбової літератури, 2009. - 368 с.
7. Кепіч О.І. Вища математика: Плани практичних занять/ О. І. Кепіч; Університет економіки та права "КРОК", КЕПІТ. - К.: Університет економіки та права "КРОК", 2011. - 12 с.
8. Клепко В.Ю. Вища математика в прикладах і задачах: Навчальний посібник/ В. Ю. Клепко, В. Л. Голець. - Видання друге перероблене та доповнене. - К.: Центр навчальної літератури, 2009. - 600 с.
9. Іваненко Т.В. Математичні методи в економіці. Навчальний посібник / Т.В. Іваненко, О.О. Іваненко.- К.: Університет економіки і права «Крок», 2014. – 256 с.
- 10.Пірятинська О.Ю., Хрутьба В.О., Пшонківська І.М. Збірник завдань з курсу "Вища математика". частина І. - К.: ІЕП "КРОК", 2001. - 44 с.

Допоміжна

- 11.Барковський В.В. Барковська Н.В. Математика для економістів: Вища математика. К.: НАУ, 1997. - 397с.

12. Высшая математика для экономистов, Учеб. Пособие /Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Гришин, М.Н. Фридман; Под ред. Проф. Н.Ш. Кремера.-М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. - 439с.

13. Вища математика для економістів і менеджерів. Навч. Посібник /В.Р. Кігель, І.М. Кохановський, Б.І. Голець, О.І. Шаров/ К.:Таксон, 1998. - 130с.

14. Бугір М.К. Математика для економістів. Навчальний посібник. Тернопіль: Підручники і посібники, 1998. - 192с.

15. Кривуца В.Г., Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика. Практикум. К., ЦУЛ, 2003.

16. Соловейчик И.Л., Лисичкин В.Т. Сборник задач по математике для техникумов. М: ОНИКС, 2003.

17. Григорьев С.Г. Векторная алгебра и аналитическая геометрия. Учебное пособие по высшей математике. М.: 2000.

18. Идельсон А.В., Блюмкина И.А. Аналитическая геометрия. Линейная алгебра. Математика для экономистов. Учебное пособие, т, 1, М.: 2000.

19. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Учеб. пособие. В 2 ч. - М.: 1996.

20. Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. - М.: Наука, 1987.

21. Фадеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. Учебн. пособие.-М.:Наука,1977.

22. Лавренчук В. П. Вища математика: курс лекцій: у 3 ч. Ч. 1. Лінійна алгебра, аналітична геометрія, математичний аналіз / В. П. Лавренчук, Т. І. Готинчан, О. С. Кондур, В. С. Дронь. — Івано-Франківськ, 2011. — 447 с.

23. Лавренчук В. П. Математика для економістів: теорія та застосування. Лінійна алгебра, аналітична геометрія, математичний аналіз: підруч. для студ. ВНЗ / В. П. Лавренчук, Т. І. Готинчан, В. С. Дронь, О. С. Кондур ; Чернів. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича. — Вид. 3-тє, доповн. — Чернівці: Рута, 2012. — 223 с.

24. Булдигін В. В. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: навч. посіб. / В. В. Булдигін, І. В. Алексєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Н. Р. Коновалова, Л. Б. Федорова. — К.: ТВіМС, 2011. — 223 с.

25. Клімова Н. П. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Тексти лекцій. Тести. Індивідуальні завдання: навч. посіб. для студ. ВНЗ / Н. П. Клімова, О. Г. Нерух, О. О. Ремаєва. — Х.: СМІТ, 2012. — 317 с.

Інформаційні ресурси

1. Вища математика. Дистанційне навчання: [Електрон. ресурс]. – Режим доступу: <http://www.matem.com.ua>

2. Історична мозаїка в математиці: [Електрон. ресурс]. – Режим доступу: <http://www.ist-matemat.at.ua>

3. Библиотека алгоритмов: [Електрон. ресурс]. – Режим доступу: <http://www.alglib.chat.ru>

4. Математика on-line. В допомогу студенту: [Електрон. ресурс]. – Режим доступу: <http://www.mathem.h1.ru>

5. Математическая физика, анализ, геометрия - электронная версия научного журнала Украины: [Електрон. ресурс]. – Режим доступу: http://www.mag.ilt.kharkov.ua/mag_r.html