Буй Дмитро Борисович

Кахута Надія Дмитрівна

Редько Володимир Никифорович

Сільвейструк Людмила Миколаївна

ТЕОРЕТИКО-МНОЖИННІ ОСНОВИ ТАБЛИЧНИХ БАЗ ДАНИХ

Кіровоград – 2014

ББК
УДК 004.655

Буй Д.Б. Теоретико-множинні основи табличних баз даних / **Д.Б. Буй**, **Н.Д. Кахута**, **В.Н. Редько**, **Л.М. Сільвейструк**. – Київ: 2015. – 159 с.

Монографія присвячена дослідженню загальнозначних теоретико-множинних конструкцій. В роботі продемонстровано одне з можливих застосувань отриманих результатів – табличні алгебри. Вибір такої практичної реалізації зумовлений актуальною проблемою подальшого розвитку теоретичних основ табличних баз даних, в якості якої виступають табличні алгебри.

Книга розрахована на спеціалістів з інформатики, математиків, математиків-прикладників, викладачів, аспірантів і студентів ВНЗ.

Друкується за рекомендацією Вченої Ради факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка (протокол № 1 від 16 вересня 2013 р.).

Рецензенти: доктор фізико-математичних наук, доктор технічних наук, професор, провідний науковий співробітник Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України ***В.Г. Скобелев***;

доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри алгебри і математичної логіки механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка ***А.П. Петривчук***.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Людство у своїй діяльності (науковій, освітній, технологічній, художній) постійно створює й використовує моделі навколишнього світу. Усі моделі можна розбити на два великі класи: моделі предметні (матеріальні) і моделі інформаційні.

Серед інформаційних моделей виділяють моделі, які представляють об’єкти й процеси в знаковій формі. Знакові інформаційні моделі будуються з використанням різних мов (знакових систем). Знакова інформаційна модель може бути представлена у формі тексту (наприклад, програми мовою програмування), формули, таблиці (наприклад, періодичної таблиці хімічних елементів Д.І. Менделєєва).

Одним з найбільш часто використовуваних типів інформаційних моделей є прямокутна таблиця, яка складається зі стовпців і рядків. Такий тип моделей застосовується для опису ряду об’єктів, що володіють однаковими наборами властивостей. За допомогою таблиць можуть бути побудовані як статичні, так і динамічні інформаційні моделі в різних предметних областях.

Табличні інформаційні моделі найпростіше будувати за допомогою табличних (реляційних) баз даних [19; 24; 31; 33; 34; 35; 65].

Монографія присвячена актуальній проблемі подальшого розвитку теоретичної основи табличних баз даних, в якості якої виступають табличні алгебри. Табличні алгебри, введені В.Н. Редьком та Д.Б. Буєм [46; 47; 48; 49; 50], побудовані на основі добре відомих реляційних алгебр Кодда [57; 58; 59; 60; 61; 62; 63] та суттєво їх узагальнюють (подробиці див. [50, підрозділ 1.1, с. 12-20]).

Метою монографії є дослідження теоретико-множинних конструкцій повного образу, обмеження, проекції, конфінальності, сумісності, ін’єктивності та операцій узагальненого прямого добутку і узагальненого з’єднання множин функцій. Вибір саме цих конструкцій пов’язаний з їх природнім застосуванням в теорії реляційних баз даних при дослідженні табличних алгебр.

У праці досліджуються конструкції повного образу множини відносно бінарного відношення, обмеження бінарного відношення за множиною, узагальненого прямого добутку, бінарного відношення сумісності бінарних відношень, бінарного відношення конфінальності множин (індукованого частковим порядком на універсумі), ін'єктивні бінарні відношення. Результати щодо досліджених теоретико-множинних конструкцій перенесені на табличні алгебри, що суттєво збагачує теорію табличних алгебр.

Об'єктом дослідження є теоретико-множинний апарат та табличні алгебри. В монографії застосовуються теоретико-множинні та логіко-математичні методи дослідження.

Монографія складається з п'яти розділів. В першому розділі розглядається таблична алгебра та зображення її сигнатурних операцій через вказані теоретико-множинні конструкції. Завдяки цим зображенням у п'ятому розділі властивості відповідних теоретико-множинних конструкцій перенесені на табличні алгебри. Другий розділ присвячений дослідженню загальних властивостей теоретико-множинних конструкцій: повного образу множини відносно бінарного відношення, зокрема, розповсюдженню унарних (бінарних) операцій з елементів на множини елементів за допомогою повного образу; обмеженню бінарного відношення за множиною; проекції бінарного відношення та відношенню сумісності бінарних відношень. Третій розділ присвячений властивостям теоретико-множинних відношень конфінальності (коініціальності) множин та устрою сім'ї функцій, впорядкованих за включенням їх графіків. Ін'єктивні відношення та конструкція узагальненого прямого добутку розглядається в четвертому розділі.

Основні означення для табличних алгебр викладено у підрозділі 1.1. У підрозділ 1.2 отримано зображення сигнатурних операцій табличної алгебри та обґрунтовано доцільність дослідження відповідних теоретико-множиних конструкцій.

У підрозділі 2.1 вводяться основні поняття та позначення, крім того встановлено логічний зв'язок між функціональністю та ін'єктивністю бінарних відношень. Підрозділ 2.2 присвячений дослідженню повного образу. У підрозділі 2.3 досліджується конструкція розповсюдження унарних та бінарних операцій з елементів на множини елементів (іншими словами з множини на булеан множини) в термінах повного образу. Основні властивості обмеження наведені у підрозділі 2.4. Дослідження відношення сумісності розпочато у підрозділі 2.5.

У підрозділі 3.1 розглядаються два дуальних відношення – відношення конфінальності та відношення коініціальності множин. Для забезпечення антисиметричності розглядаються обмеження відношень конфінальності та коініціальності на дискретні множини. У підрозділі 3.2 встановлюється структура частково впорядкованої множини (ч. в. м.) функцій, впорядкованих за включенням графіків, $<\mathbf{F},\subseteq>$. Також порушується питання функціональності об'єднання двох функцій та надаються відповідні критерії. Оскільки, ч. в. м. $<\mathbf{F},\subseteq>$ є одночасно індуктивною множиною (повною частково впорядкованою множиною), когерентною множиною, умовно повною множиною та повною напіврешіткою (complete semilattice), підрозділи 3.3 та 3.4 присвячені загальним результатам для вказаних класів ч. в. м.: наведена характеристична ознака повних напіврешіток; показано співпадіння сім'ї повних напіврішіток з сім'єю когерентних множин в класі індуктивних множин.

У підрозділі 4.1 наведена низка критеріїв ін'єктивності відношень та функцій, а також критерії ін'єктивності об'єднання (сумісних) ін'єктивних відношень (функцій). Відношення сумісності розглядається і у підрозділі 4.2 при розгляді сім'ї відношень (зокрема функцій), частково впорядкованої за включенням. На множині всіх часткових функцій (на універсумі) розглядається бінарна часткова операція об'єднання сумісних функцій. Розповсюджуючи дану операцію з функцій на множини функцій в термінах повного образу, отримується тотальна бінарна операція узагальнененого з'єднання.

Результати, отримані у розділах 2-4, можна ефективно використовувати в табличних алгебрах. Так, у п'ятому розділі продемонстровано конкретні приклади застосування отриманих теоретико-множинних результатів до табличних алгебр. У підрозділі 5.1 досліджено операції проекції, з'єднання, насичення, перейменування, активного домена, при доведенні властивостей яких явно використовуються властивості теоретико-множинних конструкцій повного образу, проекції, обмеження, конфінальності, сумісності, узагальненого прямого добутку.

Операція з'єднання досліджується також за допомогою властивостей операції об'єднання сумісних функцій у підрозділі 5.2. Також введено частковий порядок на множині всіх таблиць T за схемою відношення конфінальності, показано співпадання цього порядку з частковим порядком нижньої напіврешітки таблиць за з'єднанням.

У підрозділі 5.3. побудована узагальнена таблична алгебра шляхом зняття обмежень фінітності схем таблиць та самих таблиць, а також вимоги односхемності рядків таблиць.

На думку авторів, наукове значення монографії полягає у дослідженні загальнозначних теоретико-множинних конструкцій (повний образ множини відносно бінарного відношення, обмеження бінарного відношення за множиною, бінарне відношення конфінальності множин, бінарне відношення сумісності бінарних відношень, узагальнений прямий добуток) та подальшому застосуванню отриманих результатів, зокрема, до табличних алгебр.

Результати монографії можуть бути використані при уточненні операцій над реляціями в теорії реляційних баз даних, а також використовуватися при дослідженні табличних алгебр.

Наукові результати монографії, що пропонується, лягли в основу низки курсів, які були прочитані на факультеті кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка: нормативні курси „Прикладна логіка”, „Композиційна семантика SQL-подібних мов”; спеціальний курс „Вступ до реляційних баз даних”.

Монографія підводить підсумок циклу праць, присвячених дослідженню табличних алгебр за допомогою теоретико-множинних конструкційю. Цей цикл складають 8 статтей в наукових журналах і збірниках наукових праць [10; 11; 12; 14; 15; 16; 27; 29], депонований рукопис [46], монографія [50] та дисертація [28].

Зробимо кілька зауважень щодо форми викладення матеріалу. Леми, твердження, наслідки, формули, таблиці та рисунки нумеруються у межах свого розділу. Номер цих об’єктів складається з номера розділу та порядкового номера об’єкту в межах розділу; при посиланнях в межах розділу номер розділу видаляється. Символ □ позначає кінець формулювання твердження та кінець доведення, символ ▫ – кінець логічної частини доведення. Основні позначення наведені в підрозділі 2.1.

РОЗДІЛ 1. ТАБЛИЧНІ БАЗИ ДАНИХ

1.1. Табличні алгебри

Теорія табличних алгебр складає теоретичний фундамент мов запитів сучасних табличних баз даних. Дослідженню табличної алгебри присвячені праці [5; 7; 8; 9; 13; 16; 45; 46; 47; 48; 49; 50]. Елементи носія табличної алгебри уточнюють реляційні структури даних, а сигнатурні операції побудовані на базі основних табличних маніпуляцій в реляційних алгебрах Кодда та мові SQL: об'єднання, перетин, різниця, селекція, проекція, з'єднання, активне доповнення, перейменування та механізми групування на прикладі ділення.

Нижче подано основні означення для табличних алгебр.

При розгляді структур даних відволікаємось від різних доменів атрибутів, від спеціального значення *null*, а також дублікатів рядків в таблицях (щодо цих аспектів див. [50, розділ 3, с. 125-183]). Для замкненості тексту наведемо основні означення для табличних алгебр.

Уточнимо реляції в термінах іменних множин. Для цього зафіксуємо наступні дві множини: $\boldsymbol{A}$, елементи якої назвемо *атрибутами*, і $\boldsymbol{D}$ – *універсальний домен*. Далі ці множини гратимуть роль множин імен та денотатів відповідно.

Довільну скінченну множину атрибутів $R \subseteq \boldsymbol{A}$ назвемо *схемою*. Схеми будемо позначати як R, R_1, R_2, … *Рядком схеми* R називається іменна множина на парі R, $\boldsymbol{D}$, проекція якої за першою компонентою рівна R. Рядки будемо позначати як $s, s_1, s_2, \ldots$

Таблицею схеми R називається скінченна множина рядків схеми R. Таблиці будемо позначати як t, t_1, t_2, … Множину всіх рядків (таблиць) схеми R позначимо $S(R)$ (відповідно $T(R)$), а множину всіх рядків (таблиць) – S (відповідно T). Таким чином, $S \overset{def}{=} \bigcup\limits_{R \subseteq \boldsymbol{A}} S(R)$, $T(R) \overset{def}{=} 2^{S(R)}$, $T \overset{def}{=} \bigcup\limits_{R \subseteq \boldsymbol{A}} T(R)$.

Тут і всюди далі 2^X позначає множину всіх скінченних підмножин множини X (булеан же цієї множини позначимо як $P(X)$).

Схема може бути порожньою; при цьому існує єдиний рядок порожньої схеми, який позначається ε.

Носієм табличної алгебри є множина всіх таблиць *T*. Задамо операції. Визначимо спочатку теоретико-множинні операції, які використовують тільки множинну структуру таблиць, відволікаючись від функціональної структури рядків – елементів таблиць.

Під *об'єднанням* $\bigcup_R$ (*перетином* $\bigcap_R$, *різницею* $\setminus_R$) *таблиць схеми R* розуміється бінарна параметрична операція, отримана обмеженням теоретико-множинного об'єднання (відповідно перетину та різниці) на множину всіх таблиць схеми *R*. Таким чином, $\bigcup_R : T \times T \tilde{\to} T$, $dom \bigcup_R = T(R) \times T(R)$, $t_1 \bigcup_R t_2 \stackrel{def}{=} t_1 \bigcup t_2$, де $t_1, t_2 \in T(R)$; для перетину та різниці аналогічно.

Тут і далі стрілка вигляду $\tilde{\to}$ використовується для позначення часткових операцій, а $domf$ – для позначення області означеності функції f.

Нехай $p : S \tilde{\to} \{true, false\}$ – взагалі кажучи, частковий предикат на множині всіх рядків, де $true, false$ логічні значення істини та хиби відповідно.

Під *селекцією за предикатом p* розуміється унарна параметрична операція σ_p, яка таблиці зіставляє її підтаблицю, що містить всі рядки, на яких предикат *p* істинний. Таким чином, $\sigma_p : T \to T$, $\sigma_p(t) \stackrel{def}{=} t \bigcap p^{-1} true$, де $p^{-1} true$ відповідний повний прообраз – множина всіх рядків, на яких предикат істинний (точніше треба було б писати $p^{-1}(\{true\})$). На даному рівні абстракції структура предикату-параметру селекції не конкретизується.

Визначимо спеціальні операції, які використовують (функціональну) структуру елементів таблиць – структуру іменних множин.

Нехай $X \subseteq \boldsymbol{A}$ – скінченна множина атрибутів. Під *проекцією за множиною атрибутів X* розуміється унарна параметрична операція π_X, значеннями якої є таблиці, що складаються з обмежень за множиною X всіх рядків вихідних таблиць. Таким чином, $\pi_X : T \to T$, $\pi_X(t) \stackrel{def}{=} \{s \mid X \mid s \in t\}$.

Тут і далі $s \mid X$ – обмеження рядка s за множиною X, яке розуміється стандартно: $s \mid X \stackrel{def}{=} s \bigcap X \times \boldsymbol{D}$. Повністю аналогічно вводиться обмеження бінарного відношення за множиною: $U \mid X \stackrel{def}{=} U \bigcap X \times \pi_2^2 U$.

Тут і всюди далі $\pi_i^2 U$ – проекція бінарного відношення U за i-тою компонентою, $i = 1,2$.

Під *з'єднанням* розуміється бінарна операція ⊗, значеннями якої є таблиці, що складаються з усяких об'єднань сумісних рядків вихідних таблиць. Таким чином, $\otimes : T \times T \to T$, $t_1 \otimes t_2 \stackrel{def}{=} \{s_1 \bigcup s_2 \mid s_1 \in t_1 \,\&\, s_2 \in t_2 \,\&\, s_1 \approx s_2\}$.

Тут і всюди далі $\approx$ – бінарне відношення сумісності бінарних відношень (зокрема, функцій; зокрема, рядків): $U_1 \approx U_2 \stackrel{def}{\Leftrightarrow} U_1 \mid X = U_2 \mid X$, де $X \stackrel{def}{=} \pi_1^2 U_1 \bigcap \pi_1^2 U_2$.

В цій операції атрибути несуть семантичне навантаження: рівність атрибутів вимагає рівності їхніх значень в рядках, що формують результат з'єднання.

Безпосередньо з означення випливає, що $t_1 \otimes t_2 = \{s \in S(R_1 \bigcup R_2) \mid s \mid R_1 \in t_1 \,\&\, s \mid R_2 \in t_2\}$, де $t_1 \in T(R_1)$, $t_2 \in T(R_2)$. Саме так вводиться з'єднання під назвою природного з'єднання чи еквіз'єднання в [43, розд. 2.4].

Нехай R_1, R_2 – схеми, причому $R_2 \subseteq R_1$. Під *діленням таблиць схеми* R_1 *на таблиці схеми* R_2 розуміється бінарна параметрична операція $\div_{R_2}^{R_1}$ з областю означеності $T(R_1) \times T(R_2)$, значення якої задаються таким чином:

$$t_1 \div_{R_2}^{R_1} t_2 \stackrel{def}{=} \{s \in \pi_{R_1 \setminus R_2}(t_1) \mid \{s\} \otimes t_2 \subseteq t_1\}, \text{ де } t_1 \in T(R_1), t_2 \in T(R_2).$$

Операція активного доповнення вводиться так само, як і в [43]. Активне доповнення апроксимує в деякому розумінні (подробиці див. у [50, підрозд. 2.2]) теоретико-множинне доповнення. Нам знадобиться декілька допоміжних понять.

Нехай A – атрибут, t – таблиця, тоді за означенням $D_{A,t} \overset{def}{=} \{d \mid \exists s(s \in t \& < A, d > \in s)\}$ – *активний домен атрибута A* відносно таблиці *t* за термінологією [43, розд. 2, підрозд. 2.1, с. 20].

Покладемо $C(t) \overset{def}{=} \underset{A \in R}{N} D_{A,t}$, причому для порожньої таблиці (порожньої множини рядків) слід вибирати непорожню схему, де *R* – схема таблиці *t*.

Тут *N* – оператор побудови сім'ї всіх іменних множин, які відповідають індексуванню; дамо загальне означення.

Зафіксуємо множини *V* та Σ, де множина *V* виступає в ролі множини *імен*, а множина Σ – множини *денотатів*.

Нехай $\{\Sigma_v\}_{v \in U}$ – деяке індексування підмножин денотатів $\Sigma_v \subseteq \Sigma$ іменами зі скінченної множини імен $U \subseteq V$. Під *іменною множиною, яка відповідає* даному *індексуванню*, розуміється іменна множина на парі $U, \bigcup_{v \in U} \Sigma_v$, проекція котрої за першою компонентою дорівнює множині *U*, а значення (денотат) довільного імені $v \in U$ належить множині Σ_v.

Сім'ю всіх таких іменних множин позначимо як $\underset{v \in U}{N} \Sigma_v$. Покладемо за означенням, що існує єдина іменна множина, яка відповідає всюди невизначеному індексуванню, – порожня іменна множина ε. Таким чином, $\underset{v \in \varnothing}{N} \Sigma_v \overset{def}{=} \{\varepsilon\}$.

Зауважимо, що так введений оператор побудови сім'ї всіх іменних множин, які відповідають індексуванню, по суті збігається з теоретикомножинною конструкцією узагальненого прямого добутку – $\underset{v \in U}{N} \Sigma_v = \prod_{v \in U} \Sigma_v$ (позначення розділу 4).

Відповідно до [54; 55] $C(t)$ – *насичення таблиці t*. Неважко перевірити, що $C(t)$ – таблиця, причому $t \subseteq C(t)$. Зазначимо, що насичення таблиці семантично близьке до прямокутного замикання бінарного відношення [51].

Під *активним доповненням* розуміється унарна операція ~, яка таблиці зіставляє доповнення в її насиченні (до її насичення); таким чином, $\sim: T \to T$, $\tilde{t} \overset{def}{=} C(t) \setminus t$.

Під *перейменуванням* розуміється унарна, взагалі кажучи, часткова параметрична операція $Rt_\xi : T_\xi \tilde{\to} T_\xi$, де параметром виступає $\xi : \boldsymbol{A} \tilde{\to} \boldsymbol{A}$ – ін’єктивне відображення на множині атрибутів, яка (операція) здійснює тільки перейменування атрибутів вихідних таблиць (згідно з відображенням-параметром ξ).

Формальне означення перейменування потребує введення допоміжних понять. Змістовно кажучи, перейменування таблиці – це перейменування всіх атрибутів її схеми; тому перейменування таблиці зводиться до перейменування її рядків; при цьому два цих перейменування зв’язані конструкцією повного образу. В свою чергу перейменування рядка – це перейменування тільки перших компонентів пар – елементів рядка. Дамо точні означення.

Нехай $\eta : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$ – деяка тотальна функція перейменування атрибутів, взагалі кажучи, не ін’єктивна.

Сім’ю всіх скінченних бінарних відношень на парі множин $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{D}$ позначимо S' (зазначимо, що множина всіх рядків S збігається з множиною всіх скінченних функціональних бінарних відношень на парі множин $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{D}$; таким чином, $S \subseteq S'$).

Під *перейменуванням рядків*, що відповідає функції перейменування атрибутів η, розуміється наступне відображення

$Rs_\eta : S \to S', Rs_\eta(s) \overset{def}{=} \{ < \eta(A), s(A) > | A \in \pi_1^2(s)\}$, $Rs_\eta(\varepsilon) = \varepsilon$. Очевидно, що при такому перейменуванні рядків може порушитись властивість функціональності рядків.

Тепер вимагатимемо, щоб функція перейменування атрибутів η мала наступну структуру: зафіксуємо ін'єктивну функцію вигляду $\xi : \boldsymbol{A} \tilde{\to} \boldsymbol{A}$ і покладемо $\eta \overset{def}{=} \xi \bigcup \mathrm{id}_{\boldsymbol{A} \setminus dom\xi}$. Тут і далі $\mathrm{id}_{\boldsymbol{X}} : X \to X$ – діагональ на множині X (тотожня функція).

Змістовно кажучи, атрибути з множини $dom\xi$ перейменовуються, а з різниці $\boldsymbol{A} \setminus dom\xi$ – залишаються незмінними. Наведене уточнення відповідає ситуації, коли глобально перейменовується частина атрибутів таблиць бази даних, а решта атрибутів залишається незмінними.

Зазначимо, що $\eta = \xi$ за умови тотальності функції ξ.

Схему R назвемо ξ-*допустимою*, якщо $\xi[R] \bigcap (R \setminus dom\xi) = \varnothing$, де $\xi[R] \overset{def}{=} \{A \mid \exists B(B \in R \;\&\; \xi(B) \simeq A\}$ – повний образ схеми R відносно відображення ξ. Тут і далі $\simeq$ – узагальнена рівність (сильна рівність Кліні). Множину всіх таблиць, схеми яких ξ-допустимі, позначимо T_ξ. Неважко показати, що при перейменуванні рядків ξ-допустимих схем властивість функціональності не порушується (див. [50, підрозд. 2.14, леми 2.14.1, 2.14.2]).

Під *перейменуванням*, що відповідає ін'єктивній функції перейменування атрибутів $\xi : \boldsymbol{A} \tilde{\to} \boldsymbol{A}$, розуміється унарна параметрична операція Rt_ξ з областю означеності T_ξ, значення якої задаються таким чином: $Rt_\xi(t) = Rs_\eta[t]$, $t \in T_\xi$, де, як і раніше, $\eta = \xi \bigcup \mathrm{id}_{\boldsymbol{A} \setminus \mathrm{dom}\xi}$.

Покладемо $\Omega_{P,\Xi} \overset{def}{=} \{\bigcup_R, \bigcap_R, \setminus_R, \sigma_p, \pi_X, \otimes, \div_{R_2}^{R_1}, Rt_\xi, \sim\}_{X,R,R_1,R_2 \subseteq \boldsymbol{A}}^{p \in P, \xi \in \Xi}$,

де P, Ξ – множини параметрів (для операцій селекції та перейменування відповідно). Часткову алгебру $<T; \Omega_{P,\Xi}>$ назвемо *табличною алгеброю*.

Зазначимо, що ділення та перетин похідні відносно решти операцій (з приводу проблематики взаємної похідності сигнатурних операцій табличної алгебри див. [17, розділ 4; 50, підрозділ 2.17, с. 97-124]).

При розгляді таблиць та їх схем, необхідно зважати на такі їх особливості. Порожня множина рядків, очевидно, є таблицею; назвемо її *порожньою таблицею* і позначимо $t_{\varnothing}$. Оскільки існує єдина іменна множина на парі $\varnothing$, D – а саме порожня іменна множина ε, то існує і єдиний рядок схеми $\varnothing$ – ε; значить, $S(\varnothing)=\{\varepsilon\}$. Що стосується таблиць порожньої схеми $\varnothing$, то їх дві – $t_{\varnothing}$ і $t_{\varepsilon} \overset{def}{=} \{\varepsilon\}$. Дійсно, $T(\varnothing)=2^{S(\varnothing)}=\{\varnothing,\{\varepsilon\}\}=\{t_{\varnothing},t_{\varepsilon}\}$.

Нарешті, очевидно, що за непорожньою таблицею її схема відновлюється однозначно, а порожній таблиці можна приписати довільну схему в тому розумінні, що $t_{\varnothing}\in T(R)$ для довільної схеми R (підкреслимо, що спеціальна таблиця t_{ε} має єдину схему – $\varnothing$).

1.2. Зображення сигнатурних операцій табличної алгебри

Почнемо із зображень сигнатурних операцій табличної алгебри через певні теоретико-множинні конструкції; саме ці зображення і дозволять відносно просто перенести властивості повного образу, обмеження, узагальненого прямого добутку та інших конструкцій на табличний випадок.

В наступному твердженні всі позначення використовуються в розумінні [50] та наступних розділів 2-4.

Твердження 1.1 (про зображення сигнатурних операцій табличної алгебри). Операції табличної алгебри зображаються:

1) $\pi_X(t)=\uparrow X[t]$, де $\uparrow X : S\to S$, $\uparrow X(s)=s\mid X$;

2) $t_1\otimes t_2=\bar{\bigcup}[t_1\times t_2]$, де $\bar{\bigcup}: S\times S \tilde{\to} S$, $dom\bar{\bigcup}=\{<s_1,s_2>\mid s_1\approx s_2\}$, $s_1\bar{\bigcup}s_2=s_1\cup s_2$ для всіх $<s_1,s_2>\in dom\bar{\bigcup}$;

3) $C(t) = \prod_{A \in R} D_{A,t}$, $D_{A,t} \overset{def}{=} \{d \mid \exists s (s \in t \wedge \langle A, d \rangle \in s)\}$ – активний домен атрибута A відносно таблиці t, як і раніше, R – схема таблиці t;

4) $Rt_{\xi}(t) = Rs_{\eta}[t]$, де $\eta \overset{def}{=} \xi \cup \mathrm{id}_{A \setminus dom\xi}$. □

Доведення. Ці зображення та доведення їх коректності наведені у монографії [50, розд. 2]: проекція [50, підрозд. 2.2], з'єднання [50, підрозд. 2.7], насичення [50, підрозд. 2.1], перейменування [50, підрозд. 2.1].

Розглядаючи означення з'єднання та перейменування, слід пам'ятати, що у загальному випадку при об'єднанні функцій властивість функціональності порушується. Тому для коректного означення операції з'єднання необхідно враховувати функціональність об'єднання сумісних функцій (лема 3.1), а для операції перейменування таблиць – критерій ін'єктивності об'єднання ін'єктивних сумісних відношень (твердження 4.3) та критерій ін'єктивності тотальної операції вигляду $[f]$ (твердження 2.8). □

Основний результат розділу 1 полягає у встановленні зображень основних операцій табличної алгебри через теоретико-множинні конструкції повного образу, обмеження, узагальненого прямого добутку (див. таблицю 1). Саме наявність цих зображень і дозволяє отримувати властивості табличних операцій як наслідки властивостей вказаних теоретико-множинних конструкцій.

Таблиця 1.1 – Основні результати розділу 1

№ п.п.	Твердження	Стисле формулювання	Інтерпретація
(1)	(2)	(3)	(4)
1.	Твердження 1.1.	$\pi_X(t) = \uparrow X[t]$, $t_1 \otimes t_2 = \bar{\bigcup}[t_1 \times t_2]$, $C(t) = \prod_{A \in R} D_{A,t}$, $Rt_\xi(t) = Rs_\eta[t]$	Зображення сигнатурних операцій табличної алгебри через конструкції повного образу, обмеження, (узагальненого) прямого добутку.

РОЗДІЛ 2. ПОВНИЙ ОБРАЗ, ОБМЕЖЕННЯ, ПРОЕКЦІЯ, ВІДНОШЕННЯ СУМІСНОСТІ

2.1. Загальні зауваження

Зафіксуємо універсум $\boldsymbol{D}$, елементи якого позначимо *x, y, z,…* Підмножини універсуму позначимо *X, Y, …,* бінарні відношення на $\boldsymbol{D}$ (тобто множини пар, компоненти яких належать універсуму) – *U, V,…*

Бінарне відношення *U* назвемо *функціональним,* якщо для всіх елементів *x, y, z* виконується імплікація $< x, y > \in U \& < x, z > \in U \Rightarrow y = z$.

Функціональні бінарні відношення (за іншою термінологією (*часткові*) *функції*) позначимо *f, g,… Область означеності* (рос. – „область определенности” [40, гл. 1, § 1, с. 20][1]) функції *f* позначимо $domf$, вона співпадає з проекцією функції (як бінарного відношення) за першою компонентою – $domf = \pi_1^2 f$. Тут і далі, як раніше, $\pi_i^2 U$ – проекція бінарного відношення за i-ю компонентою, $i = 1{,}2$.

В літературі поняття ін’єктивності застосовується до функцій, природно розповсюдимо його на відношення: бінарне відношення *U* назвемо *ін’єктивним*, якщо для всіх елементів *x, y, z* виконується імплікація $< x, y > \in U \& < z, y > \in U \Rightarrow x = z.$[2] Приклад нефункціонального ін’єктивного відношення наведений на рис. 1. Докладно ін’єктивні відношення будуть розглядатися в розділі 4.

Наступне очевидне твердження висвітлює природний тісний зв’язок між властивостями функціональності та ін’єктивності за допомогою обернених відношень. *Відношення, обернене до відношення U*, вводиться стандартно – $U^{-1} \overset{def}{=} \{< x, y > | < y, x > \in U\}$.

[1] Зауважимо, що в другому виданні добре відомої монографії А.І. Мальцева використовується термін „область определения” [41, гл. 1, § 1, с. 19].

[2] Очевидно, що для функціональних бінарних відношень узагальнене поняття ін’єктивності співпадає зі стандартним.

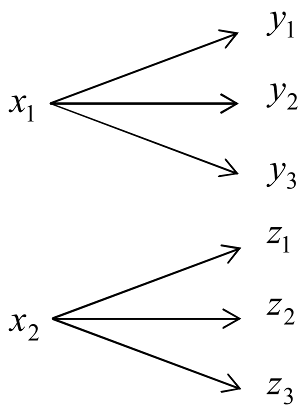

Рис. 2.1. Приклад відношення, яке є ін’єктивним, але не є функціональним

Твердження 2.1 (зв’язок між функціональністю та ін’єктивністю). Виконується еквівалентність: відношення U є функціональним $\Leftrightarrow$ обернене відношення U^{-1} є ін’єктивним. □

Доведення. Необхідність доведемо від супротивного. Нехай відношення U функціональне, але обернене відношення U^{-1} не є ін’єктивним. Тоді існують елементи *x, y, z,* такі, що $<x, y>, <z, y> \in U^{-1}$, причому $x \neq z$. Звідси випливає, що $<y, x>, <y, z> \in U$. Оскільки $x \neq z$, то властивість функціональності порушується для відношення U – протиріччя. ▫

Достатність доводиться повністю аналогічно. ▫ □

Отже, з точністю до порядку компонент властивості функціональності та ін’єктивності еквівалентні. Просто за стандартною домовленістю перші компоненти пар інтерпретуються як аргументи, а другі – як значення.

Цей зв’язок стає особливо зрозумілим, якщо бінарні відношення інтерпретувати як *таблиці* зі стандартними іменами $1, 2$ (тобто відмовитися від порядку компонент) $t(U) \overset{def}{=} \{\{<1, x>, <2, y>\} \mid <x, y> \in U\}$ та скористатися поняттям *функціональних залежностей* в розумінні табличних (реляційних) баз даних. При цьому таблиці розуміються згідно розділу 1, як множини функцій з однаковою областю означеності, а функціональні залежності розуміються стандартним чином (див., наприклад, монографію [50, підрозділ 2.10, с. 71] та наведену в ній бібліографію). Зв’язок розкривають дві наступні еквівалентності, які перевіряються безпосередньо: (1) бінарне відношення U функціональне $\Leftrightarrow$ на таблиці $t(U)$ виконується функціональна залежність $\{1\} \to \{2\}$, (2) бінарне відношення U ін’єктивне $\Leftrightarrow$ на таблиці $t(U)$ виконується функціональна залежність $\{2\} \to \{1\}$.

З другого боку, цілком очевидно, що існують функціональні відношення, які не є ін’єктивними, та навпаки – ін’єктивні відношення, які не є функціональними. Зрозуміло також, що існують відношення, які не є функціональними та не є ін’єктивними (див., рис. 2).

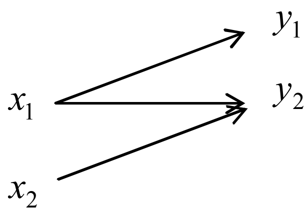

Рис. 2.2. Приклад відношення, яке не є функціональним та не є ін’єктивним

Нарешті, очевидно, що твердження 1 має своїм наслідком еквівалентне формулювання: відношення U – ін’єктивне $\Leftrightarrow$ обернене відношення U^{-1} функціональне; для доведення треба тільки врахувати тривіальну рівність $U = (U^{-1})^{-1}$. Наступний рис. 3 ілюструє взаємне положення класів функціональних та ін’єктивних бінарних відношень. Очевидно, що ін’єктивні функціональні відношення є бієкціями.

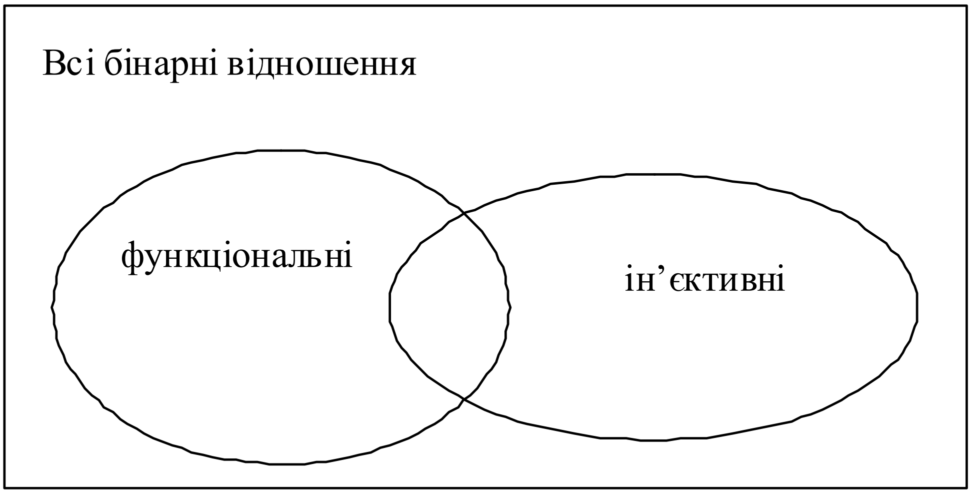

Рис. 2.3. Функціональні та ін'єктивні бінарні відношення

2.2. Повний образ

Як звичайно, *повним образом множини X відносно відношення U* (за іншою термінологією *образом множини відносно відношення*) назвемо множину $U[X] \overset{def}{=} \{y \mid \exists x(x \in X \,\&\, <x, y> \in U)\}$; *композицією відношень*[1] *U і V* – відношення $U \circ V \overset{def}{=} \{<x, y> \mid \exists z(<x, z> \in V \,\&\, <z, y> \in U)\}$. *Порожнє відношення* (тобто порожню множину пар) позначимо ε. *Відношення U* назвемо *тотальним* (за іншою термінологією *всюди визначеним*), якщо $\pi_1^2 U = D$. Під доповненням $\overline{X}$ множини X розуміємо доповнення до універсуму, тобто $\overline{X} \overset{def}{=} D \setminus X$.

Твердження 2.2 (властивості повного образу). Виконуються твердження:

1) $U_1 \subseteq U_2 \,\&\, X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow U_1[X_1] \subseteq U_2[X_2]$ (монотонність за сукупністю аргументів);

2) $U[\bigcup_i X_i] = \bigcup_i U[X_i], (\bigcup_i U_i)[X] = \bigcup_i U_i[X]$ (дистрибутивність відносно об'єднань);

---

[1] Звертаємо увагу на порядок „застосування" відношень в наведеному означенні композиції: відношення V застосовується першим, а відношення U – другим.

3) $U[\bigcap_i X_i] \subseteq \bigcap_i U[X_i]$, $(\bigcap_i U_i)[X] \subseteq \bigcap_i U_i[X]$ (верхня оцінка повного образу перетину, верхня оцінка повного образу відносно перетину);

4) $U_1[U_2[X]] = (U_1 \circ U_2)[X]$ (повний образ відносно композиції відношень або повний образ повного образу);

5) $U[X] = U[X \cap \pi_1^2 U]$;

6) $U[X] = \varnothing \Leftrightarrow X \cap \pi_1^2 U = \varnothing$ (критерій порожності повного образу); зокрема, $\varepsilon[X] = U[\varnothing] = \varnothing$ (збереження повним образом порожнього відношення та порожньої множини) і, в припущенні тотальності відношення U, – $U[X] = \varnothing \Leftrightarrow X = \varnothing$;

7) $U[X] \setminus U[Y] \subseteq U[X \setminus Y] \subseteq U[X] \subseteq \pi_2^2 U$ (нижня та верхня оцінка повного образу різниці, верхня оцінка повного образу);

8) $\pi_2^2 U \setminus U[X] \subseteq U[\overline{X}] \subseteq \pi_2^2 U$ (нижня та верхня оцінка повного образу доповнення).□

Доведення. Пп. 1, 2 доводяться безпосередньо. П. 1 означає, що повний образ є монотонним відносно теоретико-множинного включення за обома своїми аргументами (або за сукупністю аргументів[1]). П. 2 означає, що повний образ є дистрибутивним відносно теоретико-множинних об'єднань за кожним аргументом.▫

П. 3 випливає з монотонності повного образу (п. 1). Перевіримо першу нерівність, дійсно, нехай $X \overset{def}{=} \bigcap_i X_i$, тоді $X \subseteq X_i$ для всіх X_i; тобто, з огляду на раніше встановлену монотонність повного образу, $U[X] \subseteq U[X_i]$ для всіх X_i. Таким чином, $U[X] = U[\bigcap_i X_i] \subseteq \bigcap_i U[X_i]$. Друга нерівність доводиться повністю аналогічно.▫

[1] Добре відомо, що поняття монотонності за кожним аргументом збігається з поняттям монотонності за сукупністю аргументів (див., наприклад, [25, розд. 3, § 1, с. 104]).

П. 4 доводиться безпосередньо. Перевіримо, наприклад, включення $U_1[U_2[X]] \subseteq (U_1 \circ U_2)[X]$. Нехай $y \in U_1[U_2[X]]$, тоді існує елемент $z \in U_2[X]$, такий, що $< z, y > \in U_1$. В свою чергу з належності $z \in U_2[X]$ випливає існування елементу $x \in X$, такого, що $< x, z > \in U_2$. Залишилось врахувати належність $< x, y > \in U_1 \circ U_2$.▫

П. 5 доводиться безпосередньо. Дійсно, включення $U[X \cap \pi_1^2 U] \subseteq U[X]$ випливає з монотонності повного образу (п. 1). Обернене включення перевіряється прямо: нехай $y \in U[X]$, оскільки $< x, y > \in U$ для деякого $x \in X$, то для цього елемента x виконується належність $x \in X \cap \pi_1^2 U$. ▫

Доведемо п. 6. Критерій порожності повного образу перевіряється безпосередньо, а рівності $\varepsilon[X] = U[\varnothing] = \varnothing$ випливають з нього, оскільки $X \cap \pi_1^2 \varepsilon = X \cap \varnothing = \varnothing$ та $\pi_1^2 U \cap \varnothing = \varnothing$. Нарешті, остання еквівалентність пункту також випливає з критерію порожності повного образу та рівності $X \cap \pi_1^2 U = X \cap D = X$ (нагадаймо, що відношення U тотальне за припущенням).▫

Доведемо п. 7. Верхня оцінка повного образу різниці $U[X \setminus Y] \subseteq U[X]$ тривіально випливає з монотонності повного образу (п. 1), доведемо нижню. Нехай $y \in U[X] \setminus U[Y]$, тоді $y \in U[X]$ та $y \notin U[Y]$. Отже, існує елемент $x \in X$, такий, що $< x, y > \in U$. Належність $x \in X \setminus Y$ доводиться від супротивного: дійсно, якщо $x \in Y$, то $y \in U[Y]$ – протиріччя. Таким чином, $y \in U[X \setminus Y]$. Верхня оцінка повного образу встановлюється безпосередньо. Прості приклади показують, що в оцінках доведеного пункту перейти до рівностей, взагалі кажучи, не можна.▫

Доведемо п. 8. З попереднього пункту випливає, що $U[\overline{X}] = U[D \setminus X] \supseteq U[D] \setminus U[X]$; залишається врахувати очевидну рівність $\pi_2^2 U = U[D]$, яка виражає зв'язок між проекцією бінарного відношення за другою компонентою та повним образом. Нарешті $U[\overline{X}] = U[D \setminus X] \subseteq U[D] = \pi_2^2 U$ ▫□

Пп. 3 і 7 (нижня оцінка) ставлять питання про природні достатні умови для дистрибутивності повного образу відносно перетинів та різниці. Відповідь дає наступне твердження.Нижче, як звичайно, *обмеженням відношення U за множиною X* називається відношення $U \mid X \overset{def}{=} U \bigcap (X \times D) = U \bigcap (X \times \pi_2^2 U)$.[1]

Твердження 2.3 (достатні умови дистрибутивності повного образу відносно перетину та різниці). Повний образ має властивості:

1) обмеження $U \mid \bigcup_{i \in I} X_i$ ін'єктивне $\Rightarrow U[\bigcap_{i \in I} X_i] = \bigcap_{i \in I} U[X_i]$;

2) $f^{-1}[\bigcap_i X_i] = \bigcap_i f^{-1}[X_i]$;

3) обмеження $U \mid (X \bigcup Y)$ ін'єктивне $\Rightarrow U[X \setminus Y] = U[X] \setminus U[Y]$;

4) $f^{-1}[X \setminus Y] = f^{-1}[X] \setminus f^{-1}[Y]$. □

Доведення. Почнемо з п. 1. Згідно з твердженням 2 (п. 3) достатньо встановити нерівність $\bigcap_{i \in I} U[X_i] \subseteq U[\bigcap_{i \in I} X_i]$. Нехай $y \in \bigcap_{i \in I} U[X_i]$, тоді для довільного $i \in I$ існує елемент $x_i \in X_i$ (який, взагалі кажучи, залежить від індексу i), такий, що $< x_i, y > \in U$. Очевидно, що $< x_i, y > \in U \mid \bigcup_{j \in I} X_j$ для всіх $i \in I$, причому обмеження в правій частині останньої належності ін'єктивне. Звідси випливає, що всі елементи вигляду x_i, $i \in I$, співпадають між собою. Тому позначимо $x_0 \overset{def}{=} x_i$, $i \in I$. Залишається врахувати належності $< x_0, y > \in U$, де $x_0 \in \bigcap_{i \in I} X_i$. ▫

[1] Рівність другого та третього виразів (зліва-направо) перевіряється безпосередньо. Наприклад, включення $U \bigcap X \times \pi_2^2 U \subseteq U \bigcap X \times D$ випливає з монотонності декартова добутку та перетину (а також із замкненості монотонних операцій відносно суперпозиції).

П. 2 випливає з п. 1. Дійсно, f – функціональне відношення, тобто за твердженням 1 відношення f^{-1} ін'єктивне. Обмеження вигляду $f^{-1} | \bigcup_i X_i \subseteq f^{-1}$ тим паче буде ін'єктивним, оскільки властивість ін'єктивності (функціональності) зберігається при переході від відношення до його підмножин.▫

Доведемо п. 3. Згідно з п. 7 твердження 2 достатньо встановити нерівність $U[X \setminus Y] \subseteq U[X] \setminus U[Y]$. Розглянемо елемент $y \in U[X \setminus Y]$, тоді існує елемент $x \in X \setminus Y$, такий, що $< x, y > \in U$. Очевидно, що $y \in U[X]$. Заперечення $y \notin U[Y]$ доведемо від супротивного. Нехай $y \in U[Y]$, тоді існує елемент $z \in Y$, такий, що $< z, y > \in U$. Очевидно, що $< x, y >, < z, y > \in U | (X \bigcup Y)$; причому обмеження в правій частині останньої належності ін'єктивне. Тоді $x=z$, тобто $x \in Y$ – протиріччя. ▫

П. 4 випливає з п. 3; доведення проводиться повністю аналогічно п. 2.▫□

Як демонструють прості приклади, умови твердження 3 є достатніми, але не необхідними. Дійсно, розглянемо такі множини X_1, X_2 та відношення U: $X_1 \overset{def}{=} \{x_1, z\}, X_2 \overset{def}{=} \{x_2, z\}$, де елементи x_1, x_2, z попарно різні, $U \overset{def}{=} \{< x_1, y >, < z, y >, < x_2, y >\}$.

Очевидно, що $U[X_1 \bigcap X_2] = U[\{z\}] = \{y\} = U[X_1] \bigcap U[X_2]$, але обмеження $U | X_1 \bigcup X_2$ не є ін'єктивним (див. рис. 4).

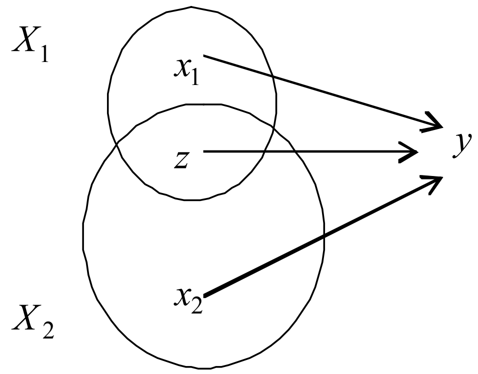

Рис. 2.4. Приклад неін'єктивного відношення U та множин X_i, таких, що виконується рівність $U[\bigcap_i X_i] = \bigcap_i U[X_i]$

В наступному твердженні наведений формальний критерій дистрибутивності повного образу відносно перетинів. Формальність проявляється в тому, що насправді спрощення відсутнє, але цей критерій висвітлює роль ін'єктивності для відповідної дистрибутивності. Зважаючи на відоме включення $U[\bigcap_i X_i] \subseteq \bigcap_i U[X_i]$ (п. 3 твердження 2 про властивості повного образу), в наступному критерії йдеться тільки про обернене включення.

Твердження 2.4 (критерій дистрибутивності повного образу відносно перетину). Виконується еквівалентність

$\bigcap_{i \in I} U[X_i] \subseteq U[X_0] \Leftrightarrow \bigcap_{i \in I} U[X_i \setminus X_0] \subseteq U[X_0]$, де $X_0 \overset{def}{=} \bigcap_{i \in I} X_i$; зокрема, для випадку перетину двох множин

$$U[X_1] \cap U[X_2] \subseteq U[X_1 \cap X_2] \Leftrightarrow U[X_1 \setminus X_2] \cap U[X_2 \setminus X_1] \subseteq U[X_1 \cap X_2]. \square$$

Доведення. За стандартними теоретико-множинними співвідношеннями, використовуючи дистрибутивність повного образу відносно об'єднань, маємо ланцюжок рівностей

$$\bigcap_{i \in I} U[X_i] = \bigcap_{i \in I} U[X_i \setminus X_0 \cup X_0] = \bigcap_{i \in I} (U[X_i \setminus X_0] \cup U[X_0]) =$$

$=(\bigcap_{i\in I} U[X_i \setminus X_0]) \cup \bigcup_{k\in K} (U[X_0] \cap Z_k)$ для деякої множини індексів $K \subseteq I$ та множин Z_k[1]. Отже, $\bigcap_{i\in I} U[X_i] = (\bigcap_{i\in I} U[X_i \setminus X_0]) \cup \bigcup_{k\in K} (U[X_0] \cap Z_k)$; звідси і випливає шукана еквівалентність. □

Аналогічний підхід можна застосувати для отримання критерія дистрибутивності повного образу відносно різниці.

Твердження 2.5 (критерій дистрибутивності повного образу відносно різниці). Виконується еквівалентність

$U[X \setminus Y] \subseteq U[X] \setminus U[Y] \Leftrightarrow U[X \setminus Y] \cap U[Y] = \varnothing$. □

Доведення. Необхідність є тривіальною, а достатність випливає з монотонності повного образу (а саме включення з $U[X \setminus Y] \subseteq U[X]$)[2]. □

Твердження 4 та 5 ми називаємо критеріями дистрибутивності, хоча в них мова йде про відповідні включення; справа в тому, що обернені включення були встановлені раніше (для перетину це п. 3 твердження 2, а для різниці – п. 7 того ж твердження 2).

Для того, щоб висвітлити зв'язок між встановленими критеріями дистрибутивності (твердження 4, 5) та достатніми умовами дистрибутивності, що формулювалися в термінах ін'єктивності, потрібно врахувати наступний простий критерій ін'єктивності бінарних відношень.

Твердження 2.6 (критерій ін'єктивності відношення). Виконується еквівалентність

відношення U є ін'єктивним $\Leftrightarrow$ $\forall X \forall Y (X \cap Y = \varnothing \Rightarrow U[X] \cap U[Y] = \varnothing)$. □

Доведення. Необхідність та достатність доводяться очевидним чином від супротивного. □

---

[1] Змістовно кажучи, всі множини об'єднання мають вигляд перетинів, серед перетинів виділяється множина $\bigcap_{i\in I} U[X_i \setminus X_0]$, решта перетинів мають складовою множину $U[X_0]$. Кажучи більш точно, тут застосовується властивість так званої повної дистрибутивності перетину відносно об'єднань: $\bigcap_{i\in I} \bigcup_{j\in J} A_{ij} = \bigcup_{f\in J^I} \bigcap_{i\in I} A_{if(i)}$ [37, част. I, § 2, с.19].

[2] По суті використовується елементарна загальнозначна еквівалентність $A \subseteq B \setminus C \Leftrightarrow A \cap C = \varnothing$ в припущенні, що $A \subseteq B$.

Зауважимо, що ін'єктивні відношення, зокрема, критерії ін'єктивності будуть докладно розглядатися в розділі 3.

Таким чином, для ін'єктивного відношення U включення $U[X_1 \setminus X_2] \bigcap U[X_2 \setminus X_1] \subseteq U[X_1 \bigcap X_2]$ з твердження 4 виконується автоматично, оскільки ліва частина просто порожня згідно з твердженням 6; аналогічно рівність $U[X \setminus Y] \bigcap U[Y] = \varnothing$ з твердження 5 також виконується автоматично.

2.3. Розповсюдження операцій з елементів на множини

Повний образ природно дозволяє унарні (бінарні) операції на універсумі розповсюджувати на булеан універсуму. Нехай $f : \boldsymbol{D} \tilde{\to} \boldsymbol{D}$, через $[f] : P(\boldsymbol{D}) \to P(\boldsymbol{D})$ позначимо унарну тотальну операцію на булеані універсуму $\boldsymbol{D}$, яка індукується частковою функцією f і задається рівністю $[f](X) \overset{def}{=} f[X]$.

Нехай $F : \boldsymbol{D} \times \boldsymbol{D} \tilde{\to} \boldsymbol{D}$ – бінарна (часткова) операція на $\boldsymbol{D}$; вона також індукує бінарну тотальну операцію $[F] : P(\boldsymbol{D}) \times P(\boldsymbol{D}) \to P(\boldsymbol{D})$ на булеані $\boldsymbol{D}$, яка задається рівністю $[F](X,Y) \overset{def}{=} F[X \times Y]$.

Очевидно, що операції $[f]$ та $[F]$ зберігають порожню множину: $[f](\varnothing) = \varnothing$, $[F](\varnothing, X) = [F](Y, \varnothing) = \varnothing$; це випливає з збереження порожньої множини повним образом (п. 6 твердження 2) та декартовим добутком.

Щоб продемонструвати природність саме таких розповсюджень унарних та бінарних операцій з елементів на множини елементів (іншими словами з множини на булеан множини), покажемо, як на такому шляху природно виникає відома сильна тризначна логіка Кліні[1] [30, част. ІІІ, розд. XII, § 64, с. 296-303] (див., також [20, розд. 4, § 4.1, с. 117, § 4.2, табл. 4 на с. 127; 21]).

Ця тризначна логіка була введена С. Кліні в теорії рекурсії як, зокрема, засіб побудови частково рекурсивних функцій; в системах алгоритмічних алгебр Глушкова логіка використовується при заданні умов; нарешті, зараз

[1] В літературі ще розглядається так звана слабка тризначна логіка Кліні, в якій кон'юнкція та диз'юнкція, на відміну від сильної логіки, зберігають третє , так зване, невизначене логічне значення [30, частина ІІІ, р. XII, § 64, с. 296-303].

саме така логіка використовується в класі SQL-подібних мов для реляційних баз даних та в сучасних мовах специфікацій UML/OCL (див., наприклад, [66; 67]).

Отже розглядаємо стандартну алгебру логіки $<\{T, F\}; \wedge, \vee, \neg>$, де T, F – логічні значення істини та хиби відповідно. Результати розповсюдження операцій кон'юнкції $\wedge$, диз'юнкції $\vee$ та заперечення $\neg$ на булеан $P(\{T, F\})$ наведені в трьох наступних таблицях. В перших двох таблицях першому аргументу відповідають стовпці, другому – рядки. Зауважимо, що ці розповсюдження є комутативними операціями, тому відповідні таблиці „симетричні"[1] , і співставлення аргументам стовпців чи рядків не є суттєвим. Далі буде показано, що успадкування комутативності (і асоціативності) в цьому конкретному випадку не є випадковим, а є наслідком загального результату.

Крім того, на одноелементних множинах (сінглтонах) операції $[F]$, $[f]$ моделюють вихідні операції; це випливає з наступних кускових схем:

$$[F](\{x\},\{y\}) = \begin{cases} \{F(x, y)\}, & \text{якщо} < x, y > \in domF, \\ \varnothing, & \text{якщо} < x, y > \notin domF. \end{cases}$$

$$[f](\{x\}) = \begin{cases} \{f(x)\}, & \text{якщо } x \in domf, \\ \varnothing, & \text{якщо } x \notin domf. \end{cases}$$

Таблиця 2.1 – Операція $[\wedge]$ на булеані $P(\{T, F\})$

	$\varnothing$	$\{T\}$	$\{F\}$	$\{T,F\}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
$\{T\}$	$\varnothing$	$\{T\}$	$\{F\}$	$\{T,F\}$
$\{F\}$	$\varnothing$	$\{F\}$	$\{F\}$	$\{F\}$
$\{T,F\}$	$\varnothing$	$\{T,F\}$	$\{F\}$	$\{T,F\}$

[1] За аналогією до класичного поняття симетричності матриць.

Таблиця 2.2 – Операція $[\vee]$ на булеані $P(\{T,F\})$

	$\varnothing$	$\{T\}$	$\{F\}$	$\{T,F\}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
$\{T\}$	$\varnothing$	$\{T\}$	$\{T\}$	$\{T\}$
$\{F\}$	$\varnothing$	$\{T\}$	$\{F\}$	$\{T,F\}$
$\{T,F\}$	$\varnothing$	$\{T\}$	$\{T,F\}$	$\{T,F\}$

Таблиця 2.3 – Операція $[\neg]$ на булеані $P(\{T,F\})$

Аргумент	$\varnothing$	$\{T\}$	$\{F\}$	$\{T,F\}$
Значення	$\varnothing$	$\{F\}$	$\{T\}$	$\{T,F\}$

Розглянемо наступне відображення $\varphi:\{T,F,\omega\}\to P(\{T,F\})$, де ω – третє логічне значення логіки Кліні: $\varphi(T)=\{T\}$, $\varphi(F)=\{F\}$, $\varphi(\omega)=\{T,F\}$. Домовимось також про однойменні операції: $\wedge$ – $[\wedge]$, $\vee$ – $[\vee]$, $\neg$ – $[\neg]$; за операціями алгебри тризначної логіки Кліні залишимо ті ж позначення $\wedge,\vee,\neg$.

Твердження 2.7 (вкладення алгебри тризначної логіки Кліні). Відображення φ є однозначним гомоморфізмом алгебри тризначної сильної логіки Кліні $<\{T,F,\omega\};\wedge,\vee,\neg>$ в алгебру $<P(\{T,F\});[\wedge],[\vee],[\neg]>$, тобто це відображення є вкладенням алгебри тризначної логіки Кліні в алгебру $<P(\{T,F\});[\wedge],[\vee],[\neg]>$. □

Доведення. Дійсно, замінюючи в таблицях 1-3 $\{T\},\{F\},\{T,F\}$ на T,F,ω відповідно (згідно відображення φ) та вилучаючи константні стовпчик і рядок, заповнені значенням $\varnothing$, приходимо до операцій алгебри тризначної (сильної) логіки Кліні. Наприклад, для диз'юнкції відповідна таблиця це таблиця 4, яка отримується з таблиці 2. □

Таблиця 2.4 – Операція $\vee$ алгебри тризначної (сильної) логіки Кліні

	T	F	ω
T	T	T	T
F	T	F	ω
ω	T	ω	ω

Таким чином, можна зробити висновок, що алгебра тризначної логіки Кліні одержується шляхом застосування до алгебри класичної булевської логіки конструкції розповсюдження (в термінах повного образу) унарних (заперечення) та бінарних операцій (кон’юнкція, диз’юнкція).

Зауважимо також, що зазначена конструкція розповсюдження, узагальнена природним чином, може використовуватися і при розповсюдженні функцій та предикатів на Null -значення в SQL-подібних мовах.

Візьмемо до уваги, що при такому підході функції, взагалі кажучи, можуть і не зберігати Null-значення в наступному розумінні: якщо хоча б один аргумент є Null, то результат також є Null. Зауважимо, що саме такий підхід реалізований в слабій тризначній логіці Кліні – операції зберігать ω. Повертаючись, наприклад, для числового добутку: $0 \cdot \mathrm{Null} = 0$, але $1 \cdot \mathrm{Null} = \mathrm{Null}$. Нагадаймо, що в поточному стандарті мови SQL функції та предикати повинні зберігати Null-значення (див., наприклад, [22; 23]).

Ця ж конструкція розповсюдження застосовується при побудові проекції, з’єднання та перейменування – сигнатурних операцій табличних алгебр [48; 49; 50]; саме про цей факт говорить твердження 1.1 (пп. 1, 2, 4).

Операція добутку формальних мов $\circ$ (див., наприклад, [2]) виникає, виходячи з бінарної операції конкатенації слів $\cdot$: $L_1 \circ L_2 = [\cdot](L_1, L_2) = \{x \cdot y \mid x \in L_1 \ \& \ y \in L_2\}$.

Повернемось до розгляду загальних властивостей розповсюдження операцій.

Часткову бінарну операцію F назвемо *комутативною* (*асоціативною*), якщо виконується узагальнена рівність $F(x,y) \simeq F(y,x)$ для всіх елементів x, y (відповідно $F(F(x,y),z) \simeq F(x,F(y,z))$ для всіх елементів x,y,z). Тут і далі, як і раніше, під *узагальненою рівністю* маємо на увазі рівність, в якій обидві частини або невизначені, або визначені та мають однакові значення [26, вступ, с. 11] (іноді цю узагальнену рівність називають *сильною рівністю* (*Кліні*), див., наприклад, [42, с. 44]). Перехід від стандартної рівності до узагальненої обумовлений розглядом часткових операцій.

Зв'язок між властивостями (ін'єктивність для унарних операцій, комутативність та асоціативність для бінарних) вихідних та індукованих операцій на булеані розкривають три наступних твердження 8-10.

Твердження 2.8 (критерій ін'єктивності тотальної операції вигляду $[f]$). Виконується еквівалентність

функція f ін'єктивна та тотальна $\Leftrightarrow$ операція $[f]$ ін'єктивна. □

Доведення. Почнемо з необхідності. Доведення проведемо від супротивного: нехай функція f ін'єктивна та тотальна, але операція $[f]$ не є ін'єктивною. Тоді існують різні множини X_1, X_2, такі, що $[f](X_1) = [f](X_2)$, тобто $f[X_1] = f[X_2]$. Оскільки множини X_1, X_2 різні, то існує елемент x, який належить одній з цих множин та не належить іншій. Нехай для визначеності $x \in X_1, x \notin X_2$ (дуальний випадок $x \in X_2, x \notin X_1$ розглядається повністю аналогічно).

Функція f тотальна, тому $f(x) \in f[X_1]$. Тоді існує елемент $z \in X_2$, такий, що $f(z) = f(x)$. Очевидно, що $z \neq x$, що суперечить ін'єктивності функції f.▫

Доведемо достатність також від супротивного: нехай операція $[f]$ ін'єктивна, але функція f неін'єктивна або нетотальна. Розглянемо спочатку випадок, коли функція f нетотальна. Тоді існує елемент x, такий, що $x \notin dom f$. Очевидно, що $f[\{x\}] = f[\varnothing] = \varnothing$; тобто $[f](\{x\}) = [f](\varnothing)$, що суперечить ін'єктивності операції $[f]$.

Тепер розглянемо випадок, коли функція f не є ін’єктивною. Тоді існують такі елементи $x, z \in domf$, що $f(x) = f(z)$, причому $x \neq z$. Очевидно, що $f[\{x\}] = \{f(x)\} = \{f(z)\} = f[\{z\}]$, тобто $[f](\{x\}) = [f](\{z\})$, що суперечить ін’єктивності операції [*f*]. ▫□

Очевидно, що тотальність функції *f* суттєва для необхідності; тобто якщо часткова функція *f* є ін’єктивною, то операція [*f*], взагалі кажучі, не є ін’єктивною (що демонструють прості приклади). Переходячи до відношень (тобто знімаючи вимогу функціональності), твердження 8 узагальнюється наступним чином.

Твердження 2.8' (достатня умова ін’єктивності тотальної операції вигляду $[U]$). Виконується імплікація

відношення *U* ін’єктивне та тотальне $\Rightarrow$ операція [*U*] ін’єктивна. □ (2.1)

В імплікації (1) відношення розповсюджується на булеан за тією ж самою логічною схемою: $[U](X) \overset{def}{=} U[X]$.

Доведення проводиться аналогічним способом як в твердженні 8. □

Отже, функціональність відношення не є суттєвою для необхідності твердження 8.

Разом з тим, простий приклад для зліченого універсуму показує, що функціональність суттєва для достатності; операція [*U*] ін’єктивна, але тотальне відношення *U*, яке не є функціональним, не є і ін’єктивним (див. рис. 5, де $D = \{x_i, y_i, z_i\}_i$). Таким чином, імплікація (1), в загальному випадку, не обертається для відношень.

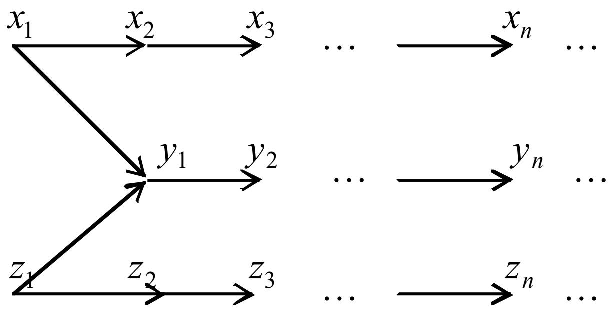

Рис. 2.5. Приклад неін’єктивного, нефункціоного тотального відношення U, такого, що операція $[U]$ є ін’єктивною

Наведемо таблицю успадкування властивості ін’єктивності при переході від відношення (зокрема, функції) U на універсумі до тотальної унарної операції $[U]$ на булеані універсуму. Стовпчики 1-3 наступної таблиці 5 відповідають властивостям функціональності, тотальності та ін’єктивності (саме у цьому порядку) початкового відношення U, стовпчик 4 – властивості ін’єктивності похідної операції $[U]$ (яка за означенням є функціональною та тотальною). Вісім рядків таблиці відповідають всім можливим випадкам, коли вихідне відношення має чи не має вказані три властивості. Знак „+” („–”) в комірці означає, що відношення чи операція має (не має) відповідної властивості. Нарешті, знак „$\pm$” означає, що немає ніякого логічного зв’язку для даного випадку.

Твердження 2.9 (успадкування ін’єктивності відношення $[U]$). Заповнення таблиці 5 є коректним. □

Таблиця 2.5 – Логічний зв'язок між властивостями ін'єктивності вихідного відношення U та індукованої операції $[U]$

<table>
<tr><td rowspan="2">п/п</td><td colspan="3">властивості відношення U</td><td rowspan="2">ін'єктивність операції $[U]$</td></tr>
<tr><td>функціональність</td><td>тотальність</td><td>ін'єктивність</td></tr>
<tr><td></td><td>(1)</td><td>(2)</td><td>(3)</td><td>(4)</td></tr>
<tr><td>1.</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>+</td><td>–</td><td>+</td><td>–</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>+</td><td>+</td><td>–</td><td>–</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>+</td><td>–</td><td>–</td><td>–</td></tr>
<tr><td>5.</td><td>–</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>6.</td><td>–</td><td>–</td><td>+</td><td>–</td></tr>
<tr><td>7.</td><td>–</td><td>–</td><td>–</td><td>–</td></tr>
<tr><td>8.</td><td>–</td><td>+</td><td>–</td><td>±</td></tr>
</table>

Доведення проводиться для всіх восьми рядків таблиці 5. Перші чотири рядки цієї таблиці стосуються випадку, коли початкове відношення U функціональне (і, значить, при доведенні можна спиратися на твердження 8), останні чотири – випадку, коли початкове відношення є відношенням загального вигляду.

Розглянемо перший рядок, в якому стверджується, що з функціональності, тотальності та ін'єктивності відношення U випливає ін'єктивність операції $[U]$. Але саме про це говорить необхідність у твердженні 8. ▫

Розглянемо другий рядок, в якому стверджується, що з функціональності, нетотальності та ін'єктивності відношення U випливає неін'єктивність операції

$[U]$. Доведення проводиться від супротивного з використанням достатності у твердженні 8[1]. ▫

Випадок третього та четвертого рядка розглядається повністю аналогічно випадку другого рядка. ▫

Заповнення п'ятого рядка випливає з імплікації (1).▫

Випадки шостого та сьомого рядків розглядаються так: нехай відношення U нетотальне, тоді існує елемент x, такий, що $x \notin \pi_1^2 U$. Залишається врахувати рівність $U[\{x\} \cup \pi_1^2 U] = U[\pi_1^2 U]$ (п. 5 твердження 2 про властивості повного образу) та тривіальну нерівність $\{x\} \cup \pi_1^2 U \neq \pi_1^2 U$. ▫

Нарешті розглянемо останній восьмий рядок. Наведемо два приклада, в яких тотальне відношення U нефункціональне та неін'єктивне, але в першому прикладі операція $[U]$ є ін'єктивною, а в другому – ні. Отже, для цього випадку ніякого логічного зв'язку між властивостями ін'єктивності відношення U та операції $[U]$ не існує.

Перший приклад наведений на рис. 5, а другий приклад на наступному рис. 6, де x, y – різні елементи універсуму, який містить тільки ці елементи, а відношення таке – $U \overset{def}{=} \{< x,x >, < x,y >, < y,x >\}$. Таким чином, $U[\{x\}] = U[\{x,y\}] = \{x,y\}$, $U[\{y\}] = \{x\}$, тобто тотальне відношення U не є функціональним та не є ін'єктивним, а операція $[U]$ не є ін'єктивною. ▫□

---

[1] Можна скористатися еквівалентним формулюванням твердження 8:
операція $[f]$ є неін'єктивною $\Leftrightarrow$ функція f є неін'єктивною або нетотальною.

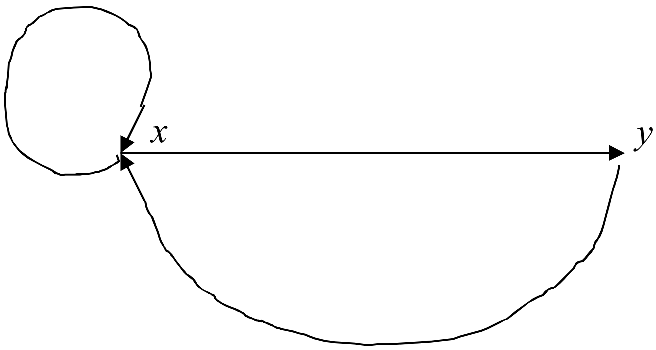

Рис. 2.6. Приклад неін’єктивного, нефункціонального тотального відношення *U*, такого, що операція [*U*] не є ін’єктивною

Прокоментуємо ще рядки 5, 6 таблиці 5 з врахуванням критерію ін’єктивності відношень (твердження 6): якщо ін’єктивне відношення U тотальне, то операція $[U]$ також ін’єктивна (рядок 5), тобто для всіх множин X, Y виконується імплікація $X \neq Y \Rightarrow U[X] \neq U[Y]$; якщо ж ін’єктивне відношення U не є тотальним, то операція $[U]$ не є ін’єктивною (рядок 6), але для всіх множин X, Y виконується „більш сильна” імплікація $X \bigcap Y = \varnothing \Rightarrow U[X] \bigcap U[Y] = \varnothing$ (тобто обмеження вигляду $[U] | \mathfrak{I}$ є ін’єктивним, де $\mathfrak{I}$ – довільна підмножина булеану $P(D)$, що складається з множин, які не перетинаються).

Наступне твердження розкриває зв’язок між властивостями комутативності та асоціативності при розповсюдженні бінарних операцій на множини. Основна ідея доведення (успадкування цих властивостей) полягає в тому, що на одноелементних множинах розповсюдження по суті співпадає з початковою операцією.

Якщо уточнювати останнє твердження, то мова йде про те, що відображення $x \overset{\varphi}{\mapsto} \{x\}$ є однозначним гомоморфізмом часткової алгебри (точніше групоїда за термінологією [39, гл. II, § 3, с. 89]) $< \boldsymbol{D}; F >$ в алгебру (групоїд) $< P(\boldsymbol{D}); [F] >$, де $P(\boldsymbol{D})$ – як і раніше, булеан універсуму $\boldsymbol{D}$ (тобто для всіх x, y виконується рівність $\varphi F(x, y) = [F](\varphi x, \varphi y)$ за умови визначення лівої частини)[1] (тобто визначення значення $F(x, y)$).

Твердження 2.10 (успадкування комутативності та асоціативності операцією $[F]$, критерії комутативності та асоціативності операції $[F]$). Виконується еквівалентність

бінарна операція F комутативна (асоціативна) $\Leftrightarrow$ бінарна тотальна операція $[F]$ комутативна (асоціативна). □

Доведення. Розглянемо спочатку випадок комутативності і почнемо з необхідності, яку доведемо від супротивного. Отже, нехай операція *F* комутативна, а операція [*F*] ні. Тоді існують множини *X, Y,* такі, що $[F](X,Y) \neq [F](Y,X)$. Значить, існує елемент *z*, який належить одній з цих множин і не належить іншій. Розглянемо для визначеності випадок $z \in [F](X,Y), z \notin [F](Y,X)$. З означення операції [*F*] випливає, що існують елементи $x \in X, y \in Y$, такі, що $z \simeq F(x, y)$. Але операція *F* комутативна, тобто $z \simeq F(x, y) \simeq F(y, x) \in F[Y \times X] = [F](Y, X)$; прийшли до протиріччя.▫

Доведемо достатність також від супротивного. Нехай операція [*F*] комутативна, а операція *F* ні. Тоді існують елементи *x, y,* такі, що відповідна узагальнена рівність не виконується – $F(x, y) \not\simeq F(y, x)$. Це може бути тільки в двох випадках: обидва значення визначені та нерівні; одне із значень визначене, а друге невизначене.

Розглянемо перший випадок: $F(x, y), F(y, x)$ визначені та $F(x, y) \neq F(y, x)$. Але $[F](\{x\},\{y\}) = \{F(x, y)\}$, $[F](\{y\},\{x\}) = \{F(y, x)\}$, тобто $[F](\{x\},\{y\}) \neq [F](\{y\},\{x\})$ всупереч комутативності операції [*F*].

---

[1] Також можна сказати, що алгебра $< \boldsymbol{D}; F >$ вкладається в алгебру $< P(\boldsymbol{D}); [F] >$. Зауважимо також, що аналогічна ситуація має місце і при розповсюдженні унарних операцій: φ є однозначним гомоморфізмом алгебри $< \boldsymbol{D}; f >$ (уноїда, див. [39, гл. VI, § 13, с. 349]) в алгебру (уноїд) $< P(\boldsymbol{D}); [f] >$, тобто алгебра $< \boldsymbol{D}; f >$ вкладається в алгебру $< P(\boldsymbol{D}); [f] >$.

Розглянемо другий випадок. Нехай для визначеності значення $F(x,y)$ визначене, а значення $F(y,x)$ невизначене. Тоді $[F](\{x\},\{y\}) = \{F(x,y)\}$, але $[F](\{y\},\{x\}) = \varnothing$, що знову ж суперечить комутативності операції $[F]$. ▫

Перейдемо до розгляду асоціативності та почнемо з необхідності, яку доведемо від супротивного. Нехай операція F асоціативна, а операція $[F]$ – ні. Тоді існують множини $X, Y, Z,$ такі, що $[F]([F](X,Y),Z) \neq [F](X,[F](Y,Z))$. Значить, існує елемент t, який належить одній з цих множин і не належить іншій. Нехай для визначеності $t \in [F]([F](X,Y),Z), t \notin [F](X,[F](Y,X))$. З означення операції $[F]$ випливає існування елементів $x \in X, y \in Y, z \in Z$, таких, що $t \simeq F(F(x,y),z)$. Але тоді $t \simeq F(x,F(y,z)) \in [F](X,[F](Y,Z))$ – протиріччя.

Достатність доведемо також від супротивного. Нехай операція $[F]$ асоціативна, а операція F такою не є. Тоді існують елементи $x, y, z,$ такі, що $F(F(x,y),z) \not\simeq F(x,F(y,z))$. Як і раніше ця узагальнена рівність не виконується тільки у двох випадках: (1) значення обох частин визначені та різні; (2) одне із значень визначене, а друге ні.

Розглянемо перший випадок: $F(F(x,y),z), F(x,F(y,z))$ визначені, але нерівні. Тоді мають місце рівності:

$$[F]([F](\{x\},\{y\}),\{z\}) = [F](\{F(x,y)\},\{z\}) = \{F(F(x,y),z))\},$$
$$[F](\{x\},[F](\{y\},\{z\})) = [F](\{x\},\{F(y,z)\}) = \{F(x,F(y,z))\}.$$

Отже, $[F]([F](\{x\},\{y\}),\{z\}) \neq [F](\{x\},[F](\{y\},\{z\}))$, що суперечить асоціативності операції $[F]$.

Розглянемо другий випадок. Нехай для визначеності значення $F(F(x,y),z)$ визначене (тобто визначене і значення $F(x,y)$), а значення $F(x,F(y,z))$ невизначене (тобто або значення $F(y,z)$ невизначене, або значення $F(y,z)$ визначене, але значення $F(x,F(y,z))$ невизначене). Як і в першому випадку розглянемо значення операції $[F]$ на відповідних сінглтонах:

$$[F]([F](\{x\},\{y\}),\{z\}) = \{F(F(x,y),z)\};$$

$$[F](\{x\},[F](\{y\},\{z\})) = \begin{cases} [F](\{x\},\varnothing) = \varnothing, якщо < y,z > \notin domF, \\ [F](\{x\},\{F(y,z)\}) = \varnothing, якщо < y,z > \in domF. \end{cases}$$

При розгляді другого рядка кускової схеми треба врахувати, що значення $F(x, F(y,z))$ невизначене за припущенням. Таким чином, асоціативність операції $[F]$ порушується; прийшли до протиріччя. ▫

Саме з останнього твердження випливає, що розширення $[\wedge],[\vee]$, які виникаюь при розгляді тризначної (сильної) логіки Кліні, являються комутативними та асоціативними, успадковуючи ці властивості від початкових операцій. З цього ж твердження випливає, що операція добутку формальних мов є асоціативною, але не комутативною, наслідуючи властивості операції конкатенації слів.

2.4. Обмеження

В наступному твердженні розглядаються властивості обмеження. Параметричний оператор на множині відношень[1] $U \mapsto U \mid X$, який відношенню ставить у відповідність його обмеження за множиною-параметром X, позначимо $\uparrow X$. Нижче, як звичайно, під *оператором замикання* на частково впорядкованій множині розуміється ідемпотентний, монотонний та спадний (або зростаючий) оператор (див., наприклад, [52, § 3, с. 45]).

Твердження 2.11 (властивості обмеження). Обмеження має властивості:

1) $U_1 \subseteq U_2 \,\&\, X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow U_1 \mid X_1 \subseteq U_2 \mid X_2$ (монотонність обмеження; зокрема, монотонність параметричного оператора $\uparrow X$);

2) $\pi_1^2(U \mid X) = \pi_1^2 U \cap X$, $\pi_2^2(U \mid X) = U[X]$ (проекція обмеження за першою та другою компонентою; зв'язок між повним образом та обмеженням);

3) $U \mid X = \varepsilon \Leftrightarrow \pi_1^2 U \cap X = \varnothing$ (критерій порожності обмеження); зокрема, $\varepsilon \mid X = U \mid \varnothing = \varepsilon$ (збереження обмеженням порожнього відношення та порожньої множини);

---

[1] Тобто $\uparrow X : P(\boldsymbol{D}^2) \to P(\boldsymbol{D}^2)$, тут $P(\boldsymbol{D}^2)$ – булеан декартового квадрату універсальної множини $\boldsymbol{D}$; таким чином, $P(\boldsymbol{D}^2)$ – множина всіх бінарних відношень на множині $\boldsymbol{D}$.

4) $U \mid X = U \mid (X \cap \pi_1^2 U), U = U \mid \pi_1^2 U$; зокрема, $\pi_1^2 U \subseteq X \Leftrightarrow U \mid X = U$;

5) $(U \mid X) \mid Y = U \mid (X \cap Y)$, або в операторному вигляді $\uparrow Y \circ \uparrow X = \uparrow (X \cap Y)$; (композиція обмежень); зокрема, $\uparrow X \circ \uparrow X = \uparrow X$ (ідемпотентність оператора $\uparrow X$);

6) $U \mid X \subseteq U$ (спадність оператора $\uparrow X$ відносно теоретико-множинного відношення включення $\subseteq$);

7) параметричний оператор $\uparrow X$ є оператором замикання відносно теоретико-множинного включення $\subseteq$;

8) $(\bigcup_i U_i) \mid X = \bigcup_i (U_i \mid X)$, $U \mid \bigcup_i X_i = \bigcup_i (U \mid X_i)$ (дистрибутивність обмеження відносно об'єднань за обома аргументами);

9) $(\bigcap_i U_i) \mid X = \bigcap_i (U_i \mid X)$, $U \mid \bigcap_i X_i = \bigcap_i (U \mid X_i)$ (дистрибутивність обмеження відносно перетинів за обома аргументами);

10) $f \subseteq g \;\&\; X \subseteq domf \Rightarrow f \mid X = g \mid X$; зокрема, $f \subseteq g \Rightarrow f = g \mid domf$, $f \subseteq g \;\&\; domf = domg \Rightarrow f = g$;

11) $(U \mid X)[Y] = U[X \cap Y]$ (повний образ відносно обмеження). □

Доведення. П. 1 доводиться безпосередньо. Зауважимо, що монотонність (відносно теоретико-множинного включення) обмеження випливає також із монотонності теоретико-множинних операцій перетину та декартового добутку, а також із замкненості класу монотонних операцій відносно суперпозиції (нагадаймо, що $U \mid X \overset{def}{=} U \cap X \times \boldsymbol{D}$).

Доведений пункт означає, що обмеження є монотонним за обома своїми аргументами (аналогічно повному образу). ▫

П. 2 також доводиться безпосередньо. Встановимо, наприклад, одне з потрібних включень: $\pi_1^2(U \mid X) = \pi_1^2(U \cap X \times \boldsymbol{D}) \subseteq \pi_1^2 U \cap \pi_1^2(X \times \boldsymbol{D}) = \pi_1^2 U \cap X$. Тут скористалися загальними властивостями проекції перетину та проекції декартового добутку (зауважимо, що наведений ланцюжок рівностей та включення залишається вірним і для випадку $X = \varnothing$). ▫

Критерій порожності обмеження з п. 3 випливає з другого пункту та наступної загальної властивості проекції – $U = \varepsilon \Leftrightarrow \pi_i^2 U = \varnothing$, де $i = 1,2$. Збереження порожньої множини та порожнього відношення обмеженням випливає з критерію порожності обмеження.▫

Встановимо першу рівність п. 4: $U \mid (X \cap \pi_1^2 U) = U \cap (X \cap \pi_1^2 U) \times \boldsymbol{D} = U \cap (X \times \boldsymbol{D}) \cap (\pi_1^2 U \times \boldsymbol{D}) = U \cap X \times \boldsymbol{D} = U \mid X.$ Вище скористалися дистрибутивністю декартового добутку відносно перетинів та очевидною нерівністю $U \subseteq \pi_1^2 U \times \boldsymbol{D}$.[1]

Друга рівність пункту доводиться аналогічно: $U \mid \pi_1^2 U = U \cap \pi_1^2 U \times \boldsymbol{D} = U$.

Перевіримо еквівалентність пункту. Імплікація $\pi_1^2 U \subseteq X \Rightarrow U \mid X = U$ доводиться, спираючись на доведені в пункті рівності: $U \mid X = U \mid (X \cap \pi_1^2 U) = U \mid \pi_1^2 U = U$ (нагадаємо, що $\pi_1^2 U \subseteq X$ за припущенням). Обернена імплікація встановлюється так: нехай $U \mid X = U$, тоді $\pi_1^2 (U \mid X) = \pi_1^2 U$, тобто за доведеним п. 2 $\pi_1^2 U \cap X = \pi_1^2 U$; очевидно, що з останньої рівності випливає шукане включення $\pi_1^2 U \subseteq X$. ▫

Розглянемо п. 5. За означенням обмеження, враховуючи дистрибутивність декартова добутку відносно перетинів, маємо[2]: $(U \mid X) \mid Y = U \cap X \times D \cap Y \times D = U \cap (X \cap Y) \times D = U \mid (X \cap Y)$.▫

Оператори $\uparrow Y \circ \uparrow X$, $\uparrow (X \cap Y)$ співпадають, оскільки, з огляду на доведення, приймають однакові значення на довільному відношенні U.▫

П. 6 випливає безпосередньо з означення обмеження. ▫

П. 7 випливає безпосередньо з встановлених пп. 1, 5, 6. ▫

---

[1] Зауважимо, що також виконується нерівність $U \subseteq \boldsymbol{D} \times \pi_2^2 U$.

[2] Для спрощення запису тут і надалі вважаємо, що декартів добуток має найбільший приорітет.

Пп. 8, 9 випливають з властивостей відповідної дистрибутивності перетину та декартового добутку. Дійсно, перевіримо, наприклад, другі рівності пунктів:

$$U \mid \bigcup_i X_i = U \cap (\bigcup_i X_i) \times \boldsymbol{D} = U \cap \bigcup_i (X_i \times \boldsymbol{D}) = \bigcup_i (U \cap (X_i \times \boldsymbol{D})) = \bigcup_i (U \mid X_i);$$

$$U \mid \bigcap_i X_i = U \cap (\bigcap_i X_i) \times \boldsymbol{D} = U \cap \bigcap_i (X_i \times \boldsymbol{D}) = \bigcap_i (U \cap X_i \times \boldsymbol{D}) = \bigcap_i U \mid X_i .$$

Доведений пункт означає, що обмеження є дистрибутивним відносно теоретико-множинних об'єднань та перетинів за кожним аргументом (аналогічно повному образу для об'єднань).▫

Доведемо першу імплікацію п. 10. Нехай $f \subseteq g$ та $X \subseteq domf$, тоді з врахуванням встановленої дистрибутивності обмеження (попередній п. 8) маємо рівності: $g \mid X = (f \cup (g \setminus f)) \mid X = f \mid X \cup (g \setminus f) \mid X = f \mid X$, оскільки $(g \setminus f) \mid X = f_{\varnothing} = \varepsilon$ (всюди невизначена функція). Для встановлення порожності обмеження $(g \setminus f) \mid X$ скористаємось критерієм п. 3 та очевидною рівністю $dom(g \setminus f) = domg \setminus domf$: $dom(g \setminus f) \cap X = (domg \setminus domf) \cap X = \varnothing$.

Друга імплікація випливає з першої та рівності $f = f \mid domf$ (п. 4). Дійсно, покладемо в першій імплікації $X = domf$, тоді $f \mid domf = f = g \mid domf$. Нарешті, третя імплікація випливає з другої: $f = g \mid domf = g \mid domg = g$. ▫

П. 11 перевіряється безпосередньо.▫□

З п. 2 доведеного твердження випливає рівність $\pi_2^2 U = U[D]$, яка використовувалась як очевидна при доведенні п. 8 твердження 2 про властивості повного образу; дійсно, використовуючи п. 4 твердження 11, маємо ланцюжок рівностей $\pi_2^2 U = \pi_2^2 (U \mid D) = U[D]$.

Зауважимо, що п. 10 не виконується для відношень, взагалі кажучи, тобто функціональність тут суттєва; наведемо відповідний приклад. Нехай відношення U, V та множина X наступні: $U \overset{def}{=} \{< x, y >\}$, $V \overset{def}{=} \{< x, y >, < x, z >\}$, $X \overset{def}{=} \{x\}$, причому $y \neq z$ (див. рис. 7).

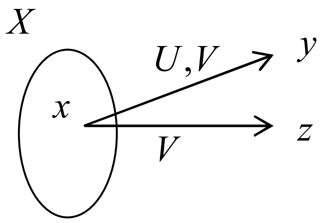

Рис. 2.7. Невиконання п. 10 твердження 11 для відношень

Очевидно, що $U \subseteq V$, $X \subseteq \pi_1^2 U$, але $U|X \neq V|X$, тобто перша імплікація не виконується. Також очевидно, що $U \neq V|\pi_1^2 U$, тобто друга імплікація також не виконується. Нарешті, очевидно, що $\pi_1^2 U = \pi_1^2 V$, але $U \neq V$, отже і третя імплікація не виконується. Зауважимо: для цього прикладу головне те, що $U \subset V$, $U \mid X = U$ та $V \mid X = V$.

Також відмітимо: останнє (третє) твердження п. 10 означає, що сім'я функцій з однаковою областю означеності, впорядкованих за включенням їхніх графіків, є дискретною множиною (в звичайному розумінні, див., наприклад, [52, § 1, с. 8].

2.5. Проекція та відношення сумісності

Виходячи з наступного очевидного зображення проекції відношення (за першою чи другою компонентою) через повний образ відношення відносно селектора

$$\pi_i^2 U = I_i^2[U],\ i = 1, 2; \tag{2.2}$$

де $I_i^2 : D \times D \to D$, $I_1^2(x, y) = x, I_2^2(x, y) = y$ – селектори, вкажемо загальнозначні властивості проекції; крім того наведемо цікаві властивості проекції, що перевіряються безпосередньо:

1) $\pi_i^2 \bigcap_j U_j \subseteq \bigcap_j \pi_i^2 U_j$ (верхня оцінка проекції перетину); $\pi_i^2 \bigcup_j U_j = \bigcup_j \pi_i^2 U_j$ (дистрибутивність проекції відносно об'єднань);

2) $\pi_1^2(X \times Y) = X$, якщо $Y \neq \varnothing$; $\pi_2^2(X \times Y) = Y$, якщо $X \neq \varnothing$ (проекції декартового добутку);

3) $\pi_i^2 U = \varnothing \Leftrightarrow U = \varepsilon$, $i = 1,2$ (критерій порожності проекції);

4) $U \subseteq \pi_1^2(U) \times \pi_2^2(U)$ (верхня оцінка відношення в термінах декартового добутку проекцій);

5) $\pi_2^2 U = U[D]$ (вираз проекції за другою компонентою через повний образ);

6) $f \approx g \Rightarrow dom(f \setminus g) = dom(f) \setminus dom(g)$ (достатня умова дистрибутивності проекції за першою компонентою відносно різниці функцій).

7) $U_1 \subseteq U_2 \Rightarrow \pi_i^2 U_1 \subseteq \pi_i^2 U_2$, де $i = 1,2$ (монотонність проекції за першою та другою компонентою).

Як і раніше, в п. 6 $\approx$ – *бінарне відношення сумісності відношень*, зокрема, функцій: $U \approx V \overset{def}{\Leftrightarrow} U \mid X = V \mid X$, тут $X \overset{def}{=} \pi_1^2 U \bigcap \pi_1^2 V$ – перетин проекцій вихідних відношень за першою компонентою [50, підрозд. 1.3, с. 25].

Очевидно, що відношення сумісності рефлексивне, симетричне (що випливає з однойменних властивостей рівності), але нетранзитивне, взагалі кажучи (що показують прості приклади)[1]; також очевидно, що порожнє відношення сумісне з довільним відношенням – $\varepsilon \approx U$, оскільки обмеження зберігає порожню множину [твердження 11 про властивості обмеження, п. 3].

Властивості 1), 3), 7) випливають з зображення (2) та відповідних властивостей повного образу; властивості 2), 4), 5) перевіряються безпосередньо; далі зупинимось на доведенні властивості 6). Зауважимо, що саме ця властивість у частковому випадку $f \subseteq g$ використовувалась в доведенні п. 10 твердження 11 про властивості обмеження (очевидно, що з порівнянності функцій за теоретико-множинним включенням випливає їхня сумісність). Почнемо з леми про зв'язок між функціональністю та ін'єктивністю, яка доповнює твердження 1.

[1] Зокрема, відношення сумісності є відношенням толерантності (в розумінні, наприклад, [44, гл. 1, § 1, с. 26; 56, гл. 3, § 1, с. 80]).

Лема 2.1 (зв'язок між функціональністю та ін'єктивністю, критерій функціональності). Відношення U є функціональним $\Leftrightarrow$ обмеження (селектора за першою компонентою за відношенням) $I_1^2 | U$ є ін'єктивним. □

Доведення. Необхідність встановимо від супротивного: нехай відношення U функціональне, але обмеження $I_1^2 | U$ не є ін'єктивним. Тоді існують різні пари $<x, y>, <x', y'> \in U$, такі, що $x = x'$. Отже, $y \neq y'$, що суперечить функціональності відношення U. ▫

Достатність доводиться аналогічно. ▫□

Наслідок 2.1. (достатня умова дистрибутивності проекції за першою компонентою відносно різниці функцій) Виконується імплікація

$$f \approx g \Rightarrow dom(f \setminus g) = dom(f) \setminus dom(g). \square$$

Доведення. Нехай $f \approx g$, тоді згідно з [10; 50, підрозд. 2.7, лема 2.7.1, с. 49] відношення $f \bigcup g$ функціональне[1]. Значить, з огляду на попередню лему 1 обмеження $I_1^2 \Big| (f \bigcup g)$ є ін'єктивним. Залишається застосувати достатню умову дистрибутивності повного образу відносно різниці (твердження 3, п. 3) та зображення (2): $dom(f \setminus g) = I_1^2[f \setminus g] = I_1^2[f] \setminus I_1^2[g] = dom(f) \setminus dom(g)$. □

Далі буде показано, що імплікація останнього наслідку обертається. Почнемо з узагальнення доведеного наслідку 1 для відношень.

Твердження 2.12 (критерій дистрибутивності проекції за першою компонентою відносно різниці відношень). Виконується еквівалентність $U | X \subseteq V \Leftrightarrow \pi_1^2(U \setminus V) = \pi_1^2 U \setminus \pi_1^2 V$, де $X \overset{def}{=} \pi_1^2 U \bigcap \pi_1^2 V$. □

Доведення почнемо з необхідності. Отже, нехай $U | X \subseteq V$, встановимо рівність $\pi_1^2(U \setminus V) = \pi_1^2 U \setminus \pi_1^2 V$, тобто, враховуючи зображення (2), – рівність $I_1^2[U \setminus V] = I_1^2[U] \setminus I_1^2[V]$.

---

[1] Роль відношення сумісності в устрої множини функцій, впорядкованих за включенням графіків, буде докладно вивчатися в наступному розділі; там, зокрема, буде доведено збереження функціональності при об'єднанні сумісних функцій.

Скористатися достатньою умовою дистрибутивності повного образу відносно різниці, як було зроблено в доведенні попереднього наслідку 1, не можна, оскільки, згідно з лемою 1, для цього потрібна функціональність відношення $U \bigcup V$, що не виконується в загальному випадку. Тому проведемо пряме доведення.

Згідно з п. 7 твердження 2 про властивості повного образу (відповідна нижня оцінка повного образу різниці) виконується включення $I_1^2[U \setminus V] \supseteq I_1^2[U] \setminus I_1^2[V]$; таким чином, залишається встановити обернене включення $I_1^2[U \setminus V] \subseteq I_1^2[U] \setminus I_1^2[V]$.

Отже нехай $x \in I_1^2[U \setminus V]$, тоді існує елемент y, такий, що $< x, y > \in U, < x, y > \notin V$. Звідси випливає, що $x \in I_1^2[U]$ і залишається встановити, що $x \notin I_1^2[V]$. Зробимо це від супротивного: нехай $x \in I_1^2[V]$, тоді $x \in I_1^2[U] \bigcap I_1^2[V] = \pi_1^2 U \bigcap \pi_1^2 V = X$; значить, маємо $< x, y > \in U \mid X \subseteq V$, звідки випливає, що $< x, y > \in V$ – прийшли до суперечності. ▫

Достатність встановимо також від супротивного: нехай $\pi_1^2(U \setminus V) = \pi_1^2 U \setminus \pi_1^2 V$, але включення $U \mid X \subseteq V$ не виконується. Звідси випливає існування елементів x, y, таких, що $x \in X = \pi_1^2 U \bigcap \pi_1^2 V$, $< x, y > \in U$, але $< x, y > \notin V$. Значить, $< x, y > \in U \setminus V$, тобто $x \in \pi_1^2(U \setminus V) = \pi_1^2 U \setminus \pi_1^2 V$; таким чином, $x \notin \pi_1^2 V$ – прийшли до суперечності. ▫□

Наслідок 2.2 (характеристична властивість відношення сумісності, достатня умова дистрибутивності проекції за першою компонентою відносно різниці).

Виконується еквівалентність

$$U \approx V \Leftrightarrow \pi_1^2(U \setminus V) = \pi_1^2 U \setminus \pi_1^2 V \ \& \ \pi_1^2(V \setminus U) = \pi_1^2 V \setminus \pi_1^2 U . \ \square$$

Доведення. Як і раніше позначимо $X \overset{def}{=} \pi_1^2 U \bigcap \pi_1^2 V$. З властивостей обмеження випливає наступна проста еквівалентність

$$U \mid X \subseteq V \Leftrightarrow U \mid X \subseteq V \mid X. \tag{2.3}$$

Дійсно, з спадності обмеження (твердження 11, п. 6) тривіально випливає імплікація $U \mid X \subseteq V \mid X \Rightarrow U \mid X \subseteq V$, а обернена імплікація випливає з монотонності та ідемпотентності обмеження (твердження 11, пп. 1, 5; до обох частин включення $U \mid X \subseteq V$ треба просто застосувати обмеження за множиною X).

Маючи еквівалентність (3), встановимо необхідність. Нехай $U \approx V$, тоді за означенням відношення сумісності виконується рівність $U \mid X = V \mid X$, тобто $U \mid X \subseteq V \mid X$ та навпаки $U \mid X \supseteq V \mid X$. Залишається застосувати еквівалентність (3) та твердження 12 (критерій дистрибутивності проекції за першою компонентою відносно різниці). ▫

Встановимо достатність. Нехай $\pi_1^2(U \setminus V) = \pi_1^2 U \setminus \pi_1^2 V$ та $\pi_1^2(V \setminus U) = \pi_1^2 V \setminus \pi_1^2 U$. З твердження 12 випливає, що $U \mid X \subseteq V$ та $V \mid X \subseteq U$; отже, враховуючи еквівалентність (3), маємо $U \mid X \subseteq V \mid X$ та $V \mid X \subseteq U \mid X$, тобто $U \mid X = V \mid X$; залишається просто скористатися означенням відношення сумісності. ▫□

З останнього наслідку випливає, зокрема, наслідок 1 та його наступне узагальнення, що полягає у встановленні оберненої імплікації.

Наслідок 2.1'. (характеристична властивість відношення сумісності функцій). Виконується еквівалентність

$$f \approx g \ \Leftrightarrow \ dom(f \setminus g) = dom(f) \setminus dom(g). \ \square$$

Доведення. Виходячи з наслідку 1 та симетричності відношення сумісності досить довести достатність. Отже, нехай $dom(f \setminus g) = dom(f) \setminus dom(g)$; з твердження 12 випливає, що $f \mid X \subseteq g$, де $X \overset{def}{=} domf \bigcap domg$; звідси, з огляду на еквівалентність (3) з доведення наслідку 2, маємо включення $f \mid X \subseteq g \mid X$; залишається застосувати останню імплікацію з п. 10 твердження 11 (про властивості обмеження) та врахувати, що функції останнього включення мають однакову область означеності (а саме X): отже $f \mid X = g \mid X$, тобто $f \approx g$. □

Як бачимо, характеристична властивість сумісності функцій (наслідок 1′) виглядає більш просто ніж для відношень загального виду (наслідок 2); справа в тому, що саме для функцій виконується п. 10 твердження 11 (про властивості обмеження). Зауважимо також, що прості приклади та врахування твердження 12 (критерій дистрибутивності проекції за першою компонентою відносно різниці відношень) показують: спростити наслідок 2, вилучаючи один з членів кон'юнкції в правій частині, не можна.

Наступне твердження 13 є аналогом твердження 12 та наслідку 2 для проекції (за першою компонентою) перетину відношень (точніше кажучи, аналогом для дистрибутивності проекції за першою компонентою відносно перетинів). В доведенні будуть потрібні дві наступні леми (причому лема 2 використовується для доведення леми 3). Далі всюди для спрощення запису повні образи сінглтонів $\{x\}$ будемо позначати через $U[x]$.

Лема 2.2. Виконуються такі твердження:

1) $U = \bigcup_{x \in \pi_1^2 U} \{x\} \times U[x]$;

2) $U \neq V \;\&\; \pi_1^2 U = \pi_1^2 V \Rightarrow \exists x (x \in \pi_1^2 U \;\&\; U[x] \neq V[x])$. □

Доведення. Перший пункт перевіряється безпосередньо, а другий випливає з першого (формальне доведення проводиться від супротивного)[1]. □

Другий пункт доведеної леми має таку змістовну інтерпретацію: якщо різні відношення мають однакові проекції за першою компонентою, то існує елемент цієї проекції, на якому відношення „розрізняються", цілком зрозуміло також, що імплікація другого пункту не обертається.

Лема 2.3 (критерій сумісності відношень). Виконується еквівалентність $U \approx V \Leftrightarrow U \approx U \setminus V \;\&\; U \approx V \setminus U$. □

---

[1] Зауважимо, що рівність першого пункту виконується і для порожнього відношення U (з використанням стандартної домовленості про об'єднання за порожньою множиною індексів $\bigcup_{i \in I} A_i = \varnothing$, якщо $I = \varnothing$).

Доведення. Почнемо з необхідності. Нехай $U \approx V$, спочатку покажемо, що $U \approx U \setminus V$. З наслідку 2 випливає рівність $\pi_1^2(U \setminus V) = \pi_1^2 U \setminus \pi_1^2 V$; таким чином, $\pi_1^2 U \bigcap \pi_1^2(U \setminus V) = \pi_1^2 U \setminus \pi_1^2 V$. Отже, позначаючи $X \overset{def}{=} \pi_1^2 U \setminus \pi_1^2 V$, треба перевірити рівність $U \mid X = (U \setminus V) \mid X$. Дійсно, використовуючи дистрибутивність обмеження відносно об'єднань (твердження 11, п. 8), маємо

$$U \mid X = (U \setminus V \bigcup U \bigcap V) \mid X = (U \setminus V) \mid X \bigcup (U \bigcap V) \mid X .$$

Тепер, виходячи з критерію порожності обмеження (твердження 11, п. 3) та загальних властивостей проекції, покажемо, що другий доданок правої частини останньої рівності насправді порожній; дійсно:

$\pi_1^2(U \bigcap V) \bigcap X \subseteq \pi_1^2 U \bigcap \pi_1^2 V \bigcap X = \pi_1^2 U \bigcap \pi_1^2 V \bigcap (\pi_1^2 U \setminus \pi_1^2 V) = \varnothing$. Шукана рівність $U \mid X = (U \setminus V) \mid X$ встановлена, а з нею і твердження $U \approx U \setminus V$. ▫

Друге твердження $U \approx V \setminus U$ встановлюється аналогічно (треба скористатися тим фактом, що згідно з наслідком 2 проекції за першою компонентою відношень U та $V \setminus U$ взагалі не перетинаються за умови $U \approx V$). ▫

Доведемо достатність від супротивного. Нехай $U \approx U \setminus V$ та $U \approx V \setminus U$, але відношення U, V не сумісні. Тоді, $U \mid X \neq V \mid X$, де $X \overset{def}{=} \pi_1^2 U \cap \pi_1^2 V$. Згідно з п. 2 леми 2 існує елемент x_0, такий, що $x_0 \in X$, причому $U[x_0] \neq V[x_0]$. Оскільки множини $U[x_0], V[x_0]$ не рівні, то можливі три наступних випадки. В перших двох випадках ці множини порівнювані (відносно теоретико-множинного включення), в третьому – непорівнювані.

1. $U[x_0] \subset V[x_0]$. Оскільки множина $U[x_0]$ непорожня, то існують елементи y_0, z_0, такі, що $y_0 \in U[x_0]$, $z_0 \in V[x_0] \setminus U[x_0]$ (див. рис. 8). Покладемо $X' \overset{def}{=} \pi_1^2 U \cap \pi_1^2(V \setminus U)$. З належностей $< x_0, y_0 > \in U$, $< x_0, z_0 > \in V \setminus U$ випливає, що $x_0 \in X'$.

Ідея подальшого доведення полягає у тому, що відношення $U, V \setminus U$, всупереч їхній сумісності, „ведуть себе по-різному” на елементі x_0.

Тепер використовуючи, що $U \approx V \setminus U$, прийдемо до суперечності в першому випадку. Дійсно, $< x_0, y_0 > \in U$, де $x_0 \in X'$, тобто $< x_0, y_0 > \in U \mid X'$. З сумісності $U \approx V \setminus U$ та означення множини X' випливає належність $< x_0, y_0 > \in (V \setminus U) \mid X'$. Тим більше $< x_0, y_0 > \in V \setminus U$, звідки $< x_0, y_0 > \notin U$ – суперечність. ▫

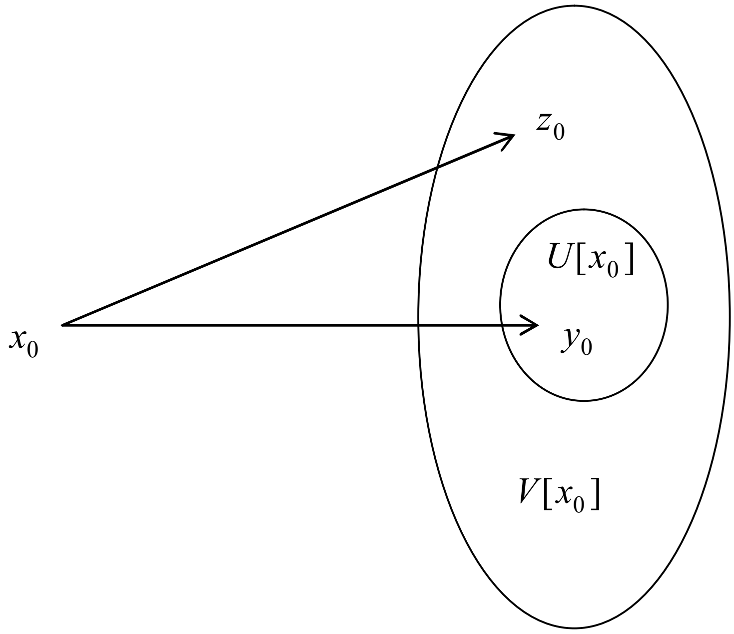

Рис. 2.8. До п. 1 доведення достатності леми 3

2. $V[x_0] \subset U[x_0]$ (відношення U і V міняються ролями). Оскільки множина $V[x_0]$ непорожня, то існують елементи y_0, z_0, такі, що $y_0 \in V[x_0]$, $z_0 \in U[x_0] \setminus V[x_0]$ (див. рис. 9). Покладемо $X'' \overset{def}{=} \pi_1^2 U \cap \pi_1^2 (U \setminus V)$; оскільки проекція монотонна, то очевидно, що $X'' \overset{def}{=} \pi_1^2 (U \setminus V)$. З належності $< x_0, z_0 > \in U \setminus V$, випливає, що $x_0 \in X''$.

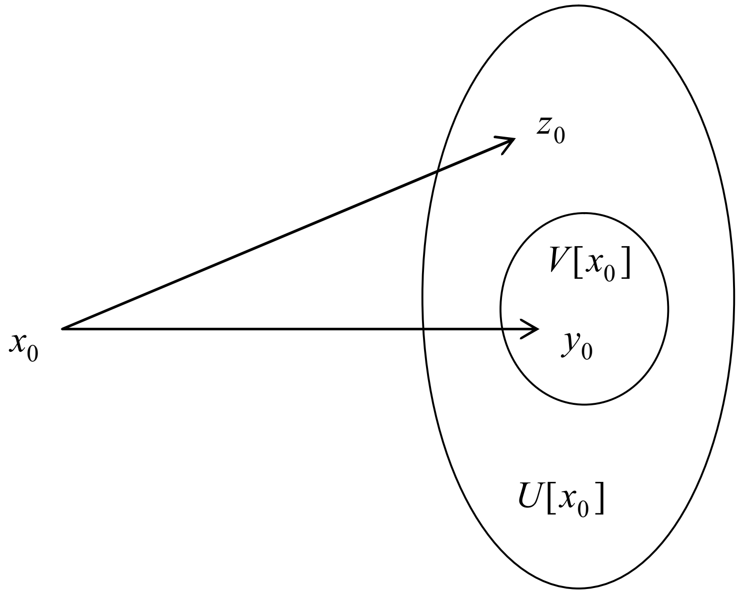

Рис. 2.9. До п. 2 доведення достатності леми 3

Ідея подальшого доведення полягає у тому, що відношення $U, U \setminus V$, всупереч їх сумісності, „ведуть себе по-різному” на елементі x_0.

Використовуючи, що $U \approx U \setminus V$, прийдемо до протиріччя в другому випадку, що розглядається. Дійсно, $< x_0, y_0 > \in U$, де $x_0 \in X''$, тобто $< x_0, y_0 > \in U \mid X''$. З сумісності $U \approx U \setminus V$ та означення множини X'' випливає належність $< x_0, y_0 > \in (U \setminus V) \mid X''$. Тим більше $< x_0, y_0 > \in U \setminus V$, звідки $< x_0, y_0 > \notin V$ – протиріччя. ▫

3. $U[x_0] \setminus V[x_0] \neq \varnothing$ и $V[x_0] \setminus U[x_0] \neq \varnothing$. Тоді існують елементи y_0, z_0, такі, що $y_0 \in U[x_0] \setminus V[x_0]$, $z_0 \in V[x_0] \setminus U[x_0]$ (див. рис. 10). Покладемо $X''' \overset{def}{=} \pi_1^2 U \cap \pi_1^2 (V \setminus U)$.

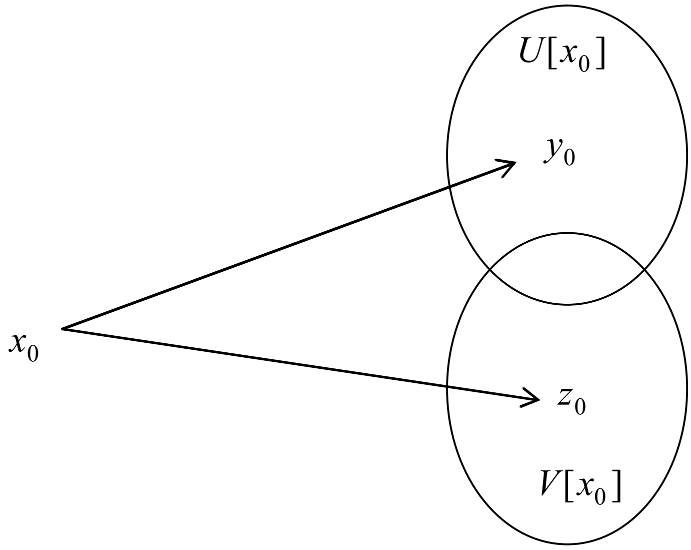

Рис. 2.10. До п. 3 доведення достатності леми 3

Оскільки $<x_0, y_0> \in U \setminus V$, то $x_0 \in \pi_1^2(U \setminus V) \subseteq \pi_1^2 U$; аналогічно, оскільки $<x_0, z_0> \in V \setminus U$, то $x_0 \in \pi_1^2(V \setminus U)$. Отже $x_0 \in X'''$.

Ідея подальшого доведення полягає у тому, що відношення $U, V \setminus U$, всупереч їхньої сумісності, „ведуть себе по-різному” на елементі x_0.

Використовуючи умову $U \approx V \setminus U$, прийдемо до суперечності в третьому випадку, що розглядається. Дійсно, $<x_0, y_0> \in U$, де $x_0 \in X'''$, тобто $<x_0, y_0> \in U \mid X'''$. З сумісності $U \approx V \setminus U$ та означення множини X''' випливає належність $<x_0, y_0> \in (V \setminus U) \mid X'''$. Тим більше $<x_0, y_0> \in V \setminus U$, звідки $<x_0, y_0> \notin U$ – суперечність. ▫□

Твердження 2.13 (достатня умова дистрибутивності проекції відносно перетину відношень, характеристична ознака відношення сумісності функцій, критерій дистрибутивності проекції відносно перетину функцій). Для відношень виконується імплікація $U \approx V \Rightarrow \pi_1^2(U \cap V) = \pi_1^2 U \cap \pi_1^2 V$, яка в загальному випадку не обертається. Для функцій виконується еквівалентність $f \approx g \Leftrightarrow dom(f \cap g) = domf \cap domg$ [1]. □

[1] Отже, перша імплікація обертається тільки для функцій.

Доведення. Почнемо з імплікації для відношень, нехай відношення сумісні – $U \approx V$. З леми 3 випливає, що тоді і $U \approx U \setminus V$. Використовуючи наслідок 2 та очевидні теоретико-множинні співвідношення, маємо ланцюжок рівностей:

$\pi_1^2(U \cap V) = \pi_1^2(U \setminus (U \setminus V)) = \pi_1^2 U \setminus \pi_1^2(U \setminus V) = \pi_1^2 U \setminus (\pi_1^2 U \setminus \pi_1^2 V) = \pi_1^2 U \cap \pi_1^2 V$. ▫

Тепер наведемо приклад, коли встановлена імплікація не обертається. Нехай x, y, z, t – попарно різні елементи, покладемо $U \stackrel{def}{=} \{<x, y>, <x, t>\}$ та $V \stackrel{def}{=} \{<x, z>, <x, t>\}$ (рис. 11). Очевидно, що ці відношення несумісні, але $\pi_1^2(U \cap V) = \pi_1^2 U \cap \pi_1^2 V = \pi_1^2 U = \pi_1^2 V = \{x\}$. ▫

Нарешті покажемо, що для функцій імплікація обертається, тобто $dom(f \cap g) = domf \cap domg \Rightarrow f \approx g$. Очевидно, що $f \cap g$ – функція, причому $f \cap g \subseteq f$ та $f \cap g \subseteq g$[1]. З другої імплікації п. 10 твердження 11 (про властивості обмеження) випливає, що $f \cap g = f|dom(f \cap g) = g|dom(f \cap g)$. Але $dom(f \cap g) = domf \cap domg$, отже, $f|(dom(f) \cap dom(g)) = g|(dom(f) \cap dom(g))$, тобто $f \approx g$. ▫□

[1] У загальному випадку див. твердження 3.4 (про устрій множини функцій) з наступного розділу 3.

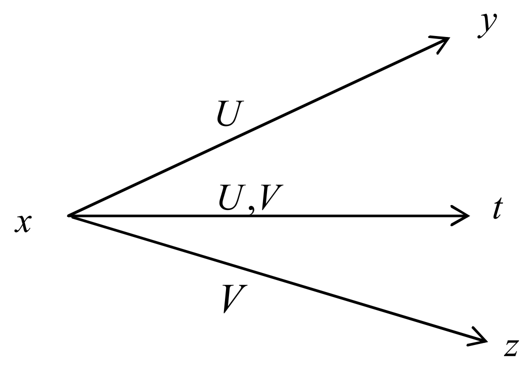

Рис. 2.11. Приклад несумісних відношень U,V, таких, що

$$\pi_1^2(U \bigcap V) = \pi_1^2 U \bigcap \pi_1^2 V$$

Підведемо підсумки розділу 2.

1. Встановлено зв’язок між функціональністю та ін’єктивністю.

2. Наведено основні властивості повного образу: монотонність, дистрибутивність відносно об’єднань, верхня оцінка повного образу перетину, повний образ відносно композиції відношень, критерій порожності повного образу, збереження повним образом порожнього відношення та порожньої множини, нижня та верхня оцінка повного образу різниці, нижня оцінка повного образу доповнення, критерій та достатні умови дистрибутивності повного образу відносно перетину та різниці.

3. Побудовано вкладення алгебри (сильної) тризначної логіки Кліні.

4. Наведено критерій ін’єктивності тотальної операції вигляду $[f]$, достатня умова ін’єктивності тотальної операції вигляду $[U]$.

5. Встановлено логічний зв’язок між властивостями ін’єктивності відношення U та індукованої операції $[U]$.

6. Встановлено успадкування комутативності та асоціативності, критерії комутативності та асоціативності операції вигляду $[F]$.

7. Наведені основні властивості обмеження: монотонність, проекція обмеження за першою та другою компонентами; зв’язок між повним образом та обмеженням, критерій порожності обмеження, збереження порожнього відношення та порожньої множини обмеженням, композиція обмежень,

ідемпотентність, монотонність та спадність оператора $\uparrow X$, дистрибутивність обмеження відносно об'єднань та перетинів, повний образ множини відносно обмеження відношення.

8. Встановлені критерій дистрибутивності проекції за першою компонентою відносно різниці відношень, характеристична властивість відношення сумісності, достатня умова дистрибутивності проекції за першою компонентою відносно різниці, характеристична властивість відношення сумісності функцій, достатня умова дистрибутивності проекції відносно перетину відношень, характеристична ознака відношення сумісності функцій, критерій дистрибутивності проекції відносно перетину функцій.

Основні результати та їх інтерпретація наведені в таблиці 6.

Таблиця 2.6 – Основні результати розділу 2

№ п.п.	**Твердження**	**Стисле формулювання**	**Інтерпретація**
(1)	(2)	(3)	(4)
1.	Твердження 2.1.	U – функціональне $\Leftrightarrow$ U^{-1} – ін'єктивне	Зв'язок між функціональністю та ін'єктивністю бінарних відношень; з точністю до порядка компонент пар ці поняття співпадають.
2.	Твердження 2.1., п. 1.	$U_1 \subseteq U_2 \,\&\, X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow U_1[X_1] \subseteq U_2[X_2]$	Монотонність повного образу за сукупністю аргументів.
3.	Твердження 2.1., п. 2.	$U[\bigcup\limits_i X_i] = \bigcup\limits_i U[X_i]$, $(\bigcup\limits_i U_i)[X] = \bigcup\limits_i U_i[X]$	Дистрибутивність повного образу відносно об'єднань за кожним аргументом.

(1)	(2)	(3)	(4)
4.	Твердження 2.1., п. 3.	$U[\bigcap_i X_i] \subseteq \bigcap_i U[X_i]$, $(\bigcap_i U_i)[X] \subseteq \bigcap_i U_i[X]$	Верхня оцінка повного образу у випадку коли пргументи є перетинами.
5.	Твердження 2.1., п. 4.	$U_1[U_2[X]] =$ $= (U_1 \circ U_2)[X]$	Повний образ відносно композиції відношень (або повний образ повного образу).
6.	Твердження 2.1., п. 6.	$U[X] = \varnothing \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow X \bigcap \pi_1^2 U = \varnothing$, $\varepsilon[X] = U[\varnothing] = \varnothing$	Критерій порожності повного образу, збереження повним образом порожнього відношення ε та порожньої множини $\varnothing$.
7.	Твердження 2.1., п. 7.	$U[X] \setminus U[Y] \subseteq U[X \setminus Y] \subseteq$ $\subseteq U[X] \subseteq \pi_2^2 U$	Нижня та верхня оцінки повного образу різниці, верхня оцінка повного образу.
8.	Твердження 2.1., п. 8.	$\pi_2^2 U \setminus U[X] \subseteq$ $\subseteq U[\overline{X}] \subseteq \pi_2^2 U$	Нижня та верхня оцінки повного образу доповнення.
9.	Твердження 2.3., п. 1.	$U \mid \bigcup_{i \in I} X_i$ ін'єктивне $\Rightarrow$ $\Rightarrow U[\bigcap_{i \in I} X_i] = \bigcap_{i \in I} U[X_i]$	Достатня умова дистрибутивності повного образу відносно перетинів.

(1)	(2)	(3)	(4)
10.	Твердження 2.3., п. 2.	$f^{-1}[\bigcap_i X_i] = \bigcap_i f^{-1}[X_i]$	Дистрибутивність повного прообразу функції відносно перетинів.
11.	Твердження 2.3., п. 3.	$U \mid (X \bigcup Y)$ ін'єктивне $\Rightarrow$ $U[X \setminus Y] = U[X] \setminus U[Y]$	Достатня умова дистрибутивності повного образу відносно різниці.
12.	Твердження 2.3., п. 4.	$f^{-1}[X \setminus Y] =$ $= f^{-1}[X] \setminus f^{-1}[Y]$	Дистрибутивність повного прообразу функції відносно різниці.
13.	Твердження 2.4.	$\bigcap_{i \in I} U[X_i] = U[\bigcap_{i \in I} X_i] \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \bigcap_{i \in I} U[X_i \setminus X_0] \subseteq$ $\subseteq U[X_0]$, де $X_0 \overset{def}{=} \bigcap_{i \in I} X_i$	Критерій дистрибутивності повного образу відносно перетинів.
14.	Твердження 2.5.	$U[X \setminus Y] \subseteq U[X] \setminus U[Y] \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow U[X \setminus Y] \bigcap U[Y] = \varnothing$	Критерій дистрибутивності повного образу відносно різниці.
15.	Твердження 2.6.	U ін'єктивне $\Leftrightarrow$ $\forall X \forall Y (X \bigcap Y = \varnothing \Rightarrow$ $\Rightarrow U[X] \bigcap U[Y] = \varnothing)$.	Критерій ін'єктивності відношення

(1)	(2)	(3)	(4)
16.	Твердження 2.7.	$\varphi:\{T,F,\omega\}\to P(\{T,F\})$, $\varphi(T)=\{T\}$, $\varphi(F)=\{F\}$, $\varphi(\omega)=\{T,F\}$. φ – вкладення алгебри тризначної сильної логіки Кліні $<\{T,F,\omega\};\wedge,\vee,\neg>$ в алгебру $<P(\{T,F\});[\wedge],[\vee],[\neg]>$.	Побудова алгебри тризначної сильної логіки Кліні, виходячи з алгебри класичної булевської логіки, повним образом.
17.	Твердження 2.8.	функція f ін'єктивна та тотальна $\Leftrightarrow$ операція $[f]$ ін'єктивна.	Критерій ін'єктивності операції вигляду $[f]$.
18.	Твердження 2.8'.	U ін'єктивне та тотальне $\Rightarrow$ операція $[U]$ ін'єктивна.	Достатня умова ін'єктивності тотальної операції вигляду $[U]$.
19.	Твердження 2.9. перший рядок табл. 2.5.	U функціональне, тотальне та ін'єктивне $\Rightarrow$ $[U]$ ін'єктивна.	Достатня умова успадкування ін'єктивності при переході $U\mapsto[U]$.
20.	Твердження 2.9. другий рядок табл. 2.5.	U функціональне, нетотальне та ін'єктивне $\Rightarrow$ $[U]$ не є ін'єктивною.	Достатня умова, коли ін'єктивність не успадковується при переході $U\mapsto[U]$.

(1)	(2)	(3)	(4)
21.	Твердження 2.9. третій рядок табл. 2.5.	U функціональне, тотальне та неін’єктивне $\Rightarrow$ $[U]$ не є ін’єктивною.	Достатня умова, коли неін’єктивність успадковується при переході $U \mapsto [U]$.
22.	Твердження 2.9. четвертий рядок табл. 2.5.	U функціональне, нетотальне та неін’єктивне $\Rightarrow$ $[U]$ не є ін’єктивною.	Достатня умова, коли неін’єктивність успадковується при переході $U \mapsto [U]$.
23.	Твердження 2.9. п’ятий рядок табл. 2.5.	U тотальне, ін’єктивне $\Rightarrow$ $[U]$ є ін’єктивною.	Достатня умова успадкування ін’єктивності при переході $U \mapsto [U]$.
24.	Твердження 2.9. шостий рядок табл. 2.5.	U нетотальне, ін’єктивне $\Rightarrow$ $[U]$ не є ін’єктивною.	Достатня умова неуспадкування ін’єктивності при переході $U \mapsto [U]$.
25.	Твердження 2.9. сьомий рядок табл. 2.5.	U нефункціональне, нетотальне та неін’єктивне $\Rightarrow$ $[U]$ не є ін’єктивною.	Достатня умова, коли неін’єктивність успадковується при переході $U \mapsto [U]$.
26.	Твердження 2.9. восьмий рядок табл. 2.5.	Для тотального, нефункціонального, неін’єктивного відношення U операція $[U]$ може бути як ін’ективною, так і неін’єктивною.	Для тотального, нефункціонального, неін’єктивного відношення U не має логічного зв’язку між неін’єктивністю U та ін’єктивністю $[U]$.

(1)	(2)	(3)	(4)
27.	Твердження 2.10.	$F : \boldsymbol{D} \times \boldsymbol{D} \tilde{\to} \boldsymbol{D}$ –комутативна $\Leftrightarrow$ $[F] : P(\boldsymbol{D}) \times P(\boldsymbol{D}) \to P(\boldsymbol{D})$ – комутативна.	Критерій комутативності операції *F*, успадкування комутативності при переході $F \mapsto [F]$.
28.	Твердження 2.10.	F – асоціативна $\Leftrightarrow$ $[F]$ – асоціативна.	Критерій асоціативності операції *F*, успадкування асоціативності при переході $F \mapsto [F]$.
29.	Твердження 2.11, п. 1.	$U_1 \subseteq U_2 \;\&\; X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow U_1 \mid X_1 \subseteq U_2 \mid X_2$.	Монотонність обмеження за сукупністю аргументів, монотонність оператора $\uparrow X$.
30.	Твердження 2.11, п. 2.	$\pi_1^2(U \mid X) = \pi_1^2 U \cap X$, $\pi_2^2(U \mid X) = U[X]$.	Проекція обмеження, зв'язок між повним образом та обмеженням.

(1)	(2)	(3)	(4)
31.	Твердження 2.11, п. 3.	$U \mid X = \varepsilon \Leftrightarrow \pi_1^2 U \cap X = \varnothing$, $\varepsilon \mid X = U \mid \varnothing = \varepsilon$.	Критерій порожності обмеження, збереження обмеженням порожнього відношення ε та порожньої множини $\varnothing$.
32.	Твердження 2.11, п. 5.	$(U \mid X) \mid Y = U \mid (X \cap Y)$, $\uparrow Y \circ \uparrow X = \uparrow (X \cap Y)$, $\uparrow X \circ \uparrow X = \uparrow X$.	Композиція обмежень, ідемпотентність оператора $\uparrow X$.
33.	Твердження 2.11, п. 6.	$U \mid X \subseteq U$	Спадність оператора $\uparrow X$ відносно $\subseteq$.
34.	Твердження 2.11, п. 7.	$\uparrow X$ – оператор замикання відносно.	Логічний наслідок влвстивостей монотонності, ідемпотентності на спадності
35.	Твердження 2.11, п. 8.	$(\bigcup_i U_i) \mid X = \bigcup_i (U_i \mid X)$, $U \mid \bigcup_i X_i = \bigcup_i (U \mid X_i)$.	Дистрибутивність обмеження відносно об'єднань за обома аргументами.
36.	Твердження 2.11, п. 9.	$(\bigcap_i U_i) \mid X = \bigcap_i (U_i \mid X)$, $U \mid \bigcap_i X_i = \bigcap_i (U \mid X_i)$.	Дистрибутивність обмеження відносно перетинів за обома аргументами.

(1)	(2)	(3)	(4)
37.	Твердження 2.11, п. 11.	$(U \mid X)[Y] = U[X \bigcap Y]$.	Повний образ відносно обмеження.
38.	Лема 2.1.	U функціональне $\Leftrightarrow$ $I_1^2 \mid U$ ін'єктивне.	Критерій функціональності в термінах обмеження та ін'єктивності.
39.	Наслідок 2.1.	$f \approx g \Rightarrow dom(f \setminus g) =$ $= dom(f) \setminus dom(g)$	Достатня умова дистрибутивності проекції за першою компонентою відносно різниці функцій.
40.	Твердження 2.12.	$U \mid X \subseteq V \Leftrightarrow \pi_1^2(U \setminus V) =$ $= \pi_1^2 U \setminus \pi_1^2 V$, де $X \overset{def}{=} \pi_1^2 U \bigcap \pi_1^2 V$.	Критерій дистрибутивності проекції за першою компонентою відносно різниці відношень.

(1)	(2)	(3)	(4)
41.	Наслідок 2.2.	$U \approx V \Leftrightarrow \pi_1^2(U \setminus V) =$ $= \pi_1^2 U \setminus \pi_1^2 V \ \& \ \pi_1^2(V \setminus U) =$ $= \pi_1^2 V \setminus \pi_1^2 U$	Характеристична властивість відношення сумісності $\approx$ в термінах дистрибутивності проекції за першою компонентою відносно різниці відношень; достатня умова дистрибутивності проекції за першою компонентою відносно різниці відношень.

(1)	(2)	(3)	(4)
42.	Наслідок 2.1'.	$f \approx g \Leftrightarrow dom(f \setminus g) = = dom(f) \setminus dom(g)$.	Характеристична властивість відношення сумісності функцій в термінах дистрибутивності проекції за першою компонентою відносно різниці функцій. Критерій дистрибутивності проекції за першою компонентою відносно різниці функцій.
43.	Лема 2.3.	$U \approx V \Leftrightarrow$ $U \approx U \setminus V \,\&\, U \approx V \setminus U$.	Критерій сумісності відношень.

(1)	(2)	(3)	(4)
44.	Твердження 2.13.	$U \approx V \Rightarrow \pi_1^2(U \bigcap V) =$ $= \pi_1^2 U \bigcap \pi_1^2 V,$ $f \approx g \Leftrightarrow dom(f \bigcap g) =$ $= domf \bigcap domg.$	Достатня умова дистрибутивності проекції за першою компонентою відносно перетину відношень. Критерій дистрибутивності проекції за першою компонентою відносно перетину функцій. Характеристична ознака відношення сумісності функцій.

РОЗДІЛ 3. ВІДНОШЕННЯ КОНФІНАЛЬНОСТІ ТА БУДОВА МНОЖИНИ ФУНКЦІЙ, ВПОРЯДКОВАНИХ ЗА ВКЛЮЧЕННЯМ ГРАФІКІВ

3.1. Відношення конфінальності та коініціальності множин

Зафіксуємо частковий порядок $\leq$ на універсумі D. Цей порядок індукує бінарне *відношення конфінальності* $\prec$ на булеані універсуму $P(D)$: $X \prec Y \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x(x \in X \Rightarrow \exists y(y \in Y \,\&\, x \leq y))$.

Зауважимо, що за термінологією [44, розд. I, § 2, с. 39] відношення $X \prec Y$ означає, що множина Y конфінальна множині X. Безпосередньо перевіряється, що введене відношення є рефлексивним, транзитивним, має найменшим елементом порожню множину $\varnothing$.

В загальному випадку це відношення не є антисиметричним. Наприклад, розглянемо множину натуральних чисел з стандартним порядком. Нехай, X, Y множини парних та непарних чисел, відповідно. Тоді очевидно, що $X \prec Y$ та навпаки $Y \prec X$, але ці множини не співпадають.

Отже, для того, щоб бути частковим порядком, не вистачає властивості антисиметричності; тому розглянемо обмеження цього відношення, яке буде частковим порядком.

Множину X назвемо *дискретною*, якщо частково впорядкована множина $< X, \leq >$ (за індукованим порядком) дискретна в звичайному розумінні [52, § 1, с. 8], тобто для всіх $x_1, x_2 \in X$ виконується імплікація $x_1 \leq x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$.

Твердження 3.1. Відношення конфінальності частково впорядковує сім'ю дискретних множин. □

Доведення. Очевидно, достатньо встановити антисиметричність відношення на дискретних множинах. Нехай $X \prec Y$ та $Y \prec X$, причому множини *X, Y* дискретні. Розглянемо довільний елемент $x \in X$. Тоді знайдуться елементи $y \in Y$ і $z \in X$ такі, що $x \leq y \leq z$; звідки, враховуючи транзитивність відношення $\leq$, отримуємо $x \leq z$. Але x, z – елементи дискретної множини X, тобто $x = z$. Таким чином, $x \leq y \leq x$, звідки $x = y$. Отже, $x \in Y$, тож включення $X \subseteq Y$ доведене. Обернене включення $Y \subseteq X$ встановлюється повністю аналогічно (множини *X, Y* просто міняються ролями). □

Нагадаємо, що два відношення на таблицях, які розглядаються в [49; 50, підрозділи 2.6, 2.8], будуються саме за наведеною схемою.

Наведемо загальні властивості відношення конфінальності, позначаючи верхній (нижній) конус множини X як X^{Δ} (відповідно X^{∇}), а супремум (інфімум) цієї ж множини як $\coprod X$ (відповідно $\prod X$).

Як звичайно (див., наприклад, [52]) $X^{\Delta} = \{y(\forall x \mid x \in X \Rightarrow y \geq x)\}$ та $X^{\nabla} = \{y(\forall x \mid x \in X \Rightarrow x \geq y)\}$.

Твердження 3.2. Для довільних множин виконується імплікація $X \prec Y \Rightarrow Y^{\Delta} \subseteq X^{\Delta}$. □

Доведення очевидне. □

Наслідок 3.1. Для довільних множин за умови існування їхніх супремумів виконується імплікація $X \prec Y \Rightarrow \coprod X \leq \coprod Y$. □

Доведення випливає з попереднього твердження та означення супремумів, як найменших елементів відповідних верхніх конусів. □

В літературі поняття конфінальності найчастіше використовується для конфінальних підмножин в наступному розумінні: множину Y назвемо *конфінальною підмножиною* множини X, якщо $Y \subseteq X$ та $X \prec Y$.

Основна властивість конфінальних підмножин полягає в наступному.

Твердження 3.3 (властивості конфінальних підмножин). Якщо Y конфінальна підмножина множини X, то верхні конуси цих множин співпадають – $X^{\Delta} = Y^{\Delta}$; тобто виконується узагальнена рівність $\coprod X \simeq \coprod Y$. □

Доведення. Нехай $X \prec Y$ та $Y \subseteq X$, тоді за твердженням 2 $Y^{\Delta} \subseteq X^{\Delta}$. Крім того, за загальними властивостями конусів $Y^{\Delta} \supseteq X^{\Delta}$ (див., наприклад, [52, § 1, теорема 5, п. (i), с. 11]). Тож, ці верхні конуси співпадають; і тому вони одночасно мають або не мають найменші елементи (звідси і випливає узагальнена рівність з формулювання твердження). □

Таким чином, питання про супремум множини еквівалентне такому ж питанню для її конфінальної підмножини.

Зауважимо, що незважаючи на простоту, природність та потужність властивостей конфінальнальних підмножин (твердження 3), в явному вигляді вони відсутні в літературі (див., наприклад, [52, § 1; 44, розд. 1, § 2; 18, розд. III, § 1, п. 7 та § 6, п. 5 із зведення результатів]).

На завершення додамо, що згідно з принципом двоїстості (див., наприклад, [52, § 1, с. 10]) при переході до оберненого (інверсного) порядку всі твердження для конфінальності переходять в твердження для коініціальності (з заміною верхніх конусів на нижні, супремумів на інфімуми). Наведемо відповідні означення та аналоги вищенаведених тверджень.

При зафіксованому частковому порядку $\leq$ на універсумі D бінарне *відношення коініціальності* $\lhd$ на булеані універсуму $P(D)$ вводиться так: $X \lhd Y \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x (x \in X \Rightarrow \exists y (y \in Y \,\&\, y \leq x))$.

Твердження 3.1'. Відношення коініціальності частково впорядковує сім'ю дискретних множин. □

Твердження 3.2'. Для довільних множин виконується імплікація $X \lhd Y \Rightarrow Y^{\nabla} \subseteq X^{\nabla}$. □

Наслідок 3.1'. Для довільних множин за умови існування їх інфімумів виконується імплікація $X \lhd Y \Rightarrow \prod X \leq \prod Y$. □

Множину Y назвемо *коініціальною підмножиною* множини X, якщо $Y \subseteq X$ та $X \lhd Y$.

Твердження 3.3'. Якщо Y – коініціальна підмножина множини X, то нижні конуси цих множин співпадають – $X^{\nabla} = Y^{\nabla}$; тобто виконується узагальнена рівність $\prod X \simeq \prod Y$. □

3.2. Будова частково впорядкованої множини функцій

Розглянемо устрій частково впорядкованої множини (ч. в. м.) функцій, впорядкованих за включенням їх графіків.

Бінарне відношення сумісності відношень, зокрема, функцій $\approx$ далі використовується в розумінні підрозділів 1.1 та 2.5.

Далі буде потрібне поняття сумісної множини функцій: *множину функцій* F назвемо *сумісною,* якщо для довільної скінченної підмножини $\{f_1,...,f_n\} \subseteq F$ існує функція h, така, що $f_1,...,f_n \subseteq h$ (іншими словами, довільна скінченна підмножина множини F обмежена зверху).

Сумісні множини функцій треба відрізняти від відношення сумісності відношень, зокрема, функцій. Тут є певна термінологічна плутанина; подальша лема встановлює, зокрема, логічний зв'язок між цими поняттями: функції f, g знаходяться у відношенні сумісності (тобто $f \approx g$) тоді і тільки тоді, коли множина $\{f, g\}$ сумісна.

Очевидно, що при об'єднанні функцій властивість функціональності, взагалі кажучи, порушується. Наступна лема дає відповідний критерій.

Лема 3.1 (критерій функціональності об'єднання двох функцій). Для довільних функцій f, g наступні чотири твердження еквівалентні:

1) $f \approx g$;

2) $f \bigcup g$ – функція;

3) $\{f, g\}$ – сумісна множина[1];

4) $g \mid domf \subseteq f$ (або навпаки $f \mid domg \subseteq g$). □

Доведення. Встановимо ланцюжок імплікацій $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4) \Rightarrow 1)$. Імплікацію $1) \Rightarrow 2)$ перевіримо від супротивного: нехай $f \approx g$, але об'єднання $f \bigcup g$ не є функціональним відношенням, тобто існують елементи x, y, z, такі, що $<x, y>, <x, z> \in f \bigcup g$, причому $y \neq z$. З огляду на функціональність f та g, очевидно, що $<x, y> \in f, <x, z> \in g$ (або навпаки), тобто $x \in X$, де $X \overset{def}{=} domf \bigcap domg$. Звідси випливає, що $<x, y> \in f \mid X = g \mid X$; таким чином,

[1] Оскільки одноелементна множина є (тривіально) сумісною, то по суті йдеться про існування функції h, такої, що $f, g \subseteq h$.

$<x, y> \in g$. Це з огляду на належність $<x, z> \in g$ та нерівність $y \neq z$ суперечить функціональності функції g. ▫

Імплікація $2) \Rightarrow 3)$ є тривіальною, оскільки функція $f \bigcup g$ і є верхньою гранню множини $\{f, g\}$.▫

Переходимо до імплікації $3) \Rightarrow 4)$. Нехай $\{f, g\}$ – сумісна множина, тоді існує функція h, така, що $f, g \subseteq h$. Згідно з пп. 1 та 10 твердження 2.11 про властивості обмеження маємо рівність $f = h \mid domf$ та включення $g \mid domf \subseteq h \mid domf$; отже, $g \mid domf \subseteq f$.▫

Доведемо останню імплікацію $4) \Rightarrow 1)$. Нехай $g \mid domf \subseteq f = f \mid domf$ (в правій частині нерівності застосували представлення відношення через обмеження за своєю проекцією за першою компонентою (твердження 2.11, п. 4)); візьмемо обмеження за множиною $domg$ від обох частин нерівності, згідно з монотонністю обмеження (твердження 2.11, п. 1) нерівність збережеться – $(g \mid domf) \mid domg \subseteq (f \mid domf) \mid domg$; тобто $g \mid (domf \bigcap domg) \subseteq f \mid (domf \bigcap domg)$ (твердження 2.11, п. 5 про композицію обмежень). Таким чином, $g \mid X \subseteq f \mid X$, де $X \overset{def}{=} domf \bigcap domg$; звідси за п. 10, твердження 2.11 виконується шукана рівність $g \mid X = f \mid X$, оскільки функції $g \mid X, f \mid X$ мають однакову область означеності X (що випливає, в свою чергу, з п. 2 про проекцію обмеження твердження 2.11 про властивості обмеження).▫□

Зазначимо, що подальше твердження 4 (п. 3) по суті узагальнює доведену лему, розглядаючи не двохелементні множини функцій, а множини функцій довільної потужності.

Зауважимо також, що коректне введення операції з'єднання таблиць (підрозділ 1.1) базується саме на функціональності об'єднання сумісних функцій: $t_1 \otimes t_2 \overset{def}{=} \{s_1 \cup s_2 | s_1 \in t_1 \wedge s_2 \in t_2 \wedge s_1 \approx s_2\}$.

Далі порожнє відношення ε з огляду на його функціональність будемо позначати $f_{\varnothing}$ *і називати всюди невизначеною функцією*. Множину всіх функцій на універсумі позначимо **F**.

Твердження 3.4 (будова ч. в. м. функцій). Виконуються наступні твердження:

1) $f_{\varnothing}$ – найменший елемент ч. в. м. $<\mathbf{F},\subseteq>$; ця ч. в. м. має найбільший елемент тоді і тільки тоді, коли універсум D не більше ніж одноелементний;

2) $\prod F = \bigcap_{f \in F} f$ для довільної непорожньої множини функцій $F \subseteq \mathbf{F}$[1];

3) наступні твердження еквівалентні для довільної множини функцій F:

а) супремум $\coprod F$ існує;

б) множина F обмежена зверху;

в) множина F сумісна;

г) всі функції множини F попарно сумісні: $\forall f \forall g (f, g \in F \Rightarrow f \approx g)$;

д) відношення $\bigcup_{f \in F} f$ – функціональне;

4) $\coprod F = \bigcup_{f \in F} f$ за умови існування супремума в лівій частині рівності, де F довільна множина функцій, зокрема, порожня; при цьому $\coprod \varnothing = \bigcup_{f \in \varnothing} f \overset{def}{=} f_{\varnothing}$[2]. □

Доведення. Так як перше твердження п. 1 очевидне, то доведемо тільки друге. Почнемо з достатності. Якщо універсум порожній, то сім'я **F** одноелементна та містить тільки всюди невизначену функцію, а якщо універсум одноелементний (нехай, наприклад, для визначеності $D \overset{def}{=} \{x\}$), то

[1] Йдеться про перетин функцій як множин пар, тобто про перетин графіків функцій. Непорожність множини F має принциповий характер. Справа в тім, що імфімум порожньої множини співпадає з найбільшим елементом ч. в. м. (у випадку існування останнього). В загальному випадку ч. в. м. **F** не має найбільшого елемента (див. п. 1 твердження 4).

[2] Це стандартна домовленість щодо об'єднання порожньої множини функцій.

сім'я $\mathbf{F}$ двохелементна та містить тільки всюди невизначену функцію і діагональ $\Delta_{\{x\}}$ ($\mathbf{F} = \{f_{\varnothing}, \{< x, x >\}\}$); в обох випадках найбільший елемент існує.

Необхідність доводиться від супротивного: нехай існує найбільший елемент $\mathbf{1}$, але існують два різних елементі універсуму x, y; тоді $\{< x, x >\}, \{< x, y >\} \subseteq \mathbf{1}$, отже $\{< x, x >, < x, y >\} \subseteq \mathbf{1}$, що суперечить функціональності відношення $\mathbf{1}$[1].

Як бачимо, найбільший елемент існує тільки в тривіальному випадку не більш ніж одноелементного універсуму.▫

Другий пункт встановлюється безпосередньо; зауважимо, що непорожність множини F тут суттєва: дійсно, супремум $\prod \varnothing$ збігається з найбільшим елементом, який згідно з попереднім п. 1 існує тільки в спеціальному випадку (крім того, треба ще домовлятися про значення виразу $\bigcap\limits_{f \in \varnothing} f$). ▫

Третій пункт доводиться встановленням ланцюжка імплікацій а) $\Rightarrow$ б) $\Rightarrow$ в) $\Rightarrow$ г) $\Rightarrow$ д) $\Rightarrow$ а). Дійсно, імплікація а) $\Rightarrow$ б) тривіальна. Імплікація б) $\Rightarrow$ в) випливає з того, що довільна верхня грань множини F буде верхньою гранню і будь-якої (зокрема, скінченної) підмножини цієї множини. Імплікація в) $\Rightarrow$ г) випливає з леми 1 (треба використати еквівалентність пп. 1 та 3 цієї леми і той очевидний факт, що властивість сумісності зберігається при переході від множини (функцій) до своїх підмножин). Імплікація г) $\Rightarrow$ д) доводиться від супротивного з використанням тієї ж леми 1: дійсно, нехай об'єднання $\bigcup\limits_{f \in F} f$ не є функціональним, тоді найдуться пари $< x, y >, < x, z >$ та функції $f_1, f_2 \in F$, такі, що $< x, y > \in f_1, < x, z > \in f_2$, причому $y \neq z$; оскільки $f_1 \cup f_2$ не функція, то $f_1 \not\approx f_2$ згідно з лемою 1 – протиріччя. Нарешті, імплікація д) $\Rightarrow$ а)

[1] Доведення можна завершити і по-іншому. Дійсно, оскільки відношення, яке є підмножиною функціонального відношення, буде також функціональним, то з включення $\{< x, x >, < x, y >\} \subseteq \mathbf{1}$ випливає функціональність відношення в лівій частині включеня, що, з огляду на $x \neq y$ неможливо.

встановлюється безпосередньо, причому неважко довести, що об’єднання $\bigcup_{f \in F} f$ і буде супремумом множини F. ▫

Четвертий пункт встановлюється безпосередньо з використанням еквівалентності а) $\Leftrightarrow$ д) третього пункту. ▫□

Таким чином, в ч. в. м. функцій поняття сумісної множини співпадає з поняттям обмеженої зверху множини; причому супремуми існують для сумісних (обмежених зверху) множин і тільки для таких множин (це все випливає з еквівалентностей а) $\Leftrightarrow$ б) $\Leftrightarrow$ в) п. 3 останнього твердження). В наступному підрозділі буде розглянута загальна ситуація в термінах когерентних множин та повних напіврешіток.

Сформулюємо очевидне твердження про атоми (в стандартному розумінні, див., наприклад, [52, §1, с. 9]) ч. в. м. $<\mathbf{F},\subseteq>$.

Твердження 3.5 (будова атомів ч. в. м. $<\mathbf{F},\subseteq>$). Всі атоми ч. в. м. $<\mathbf{F},\subseteq>$ мають вигляд $f_x^y : \{x\} \to \{y\}$, де $x, y \in D$; тобто всі атоми мають одноелементні графіки. □

Доведення проводиться безпосередньо від супротивного. □

3.3. Індуктивні множини, повні частково впорядковані множини, когерентні множини

Вкажемо належність ч. в. м. функцій $<\mathbf{F},\subseteq>$ до відомих класів ч. в. м. Наведемо відповідні означення в загальному випадку (див., наприклад, [3, част. 1, гл. 1]).

Нехай $<D,\leq>$ – ч. в. м., а $X \subseteq D$. Підмножина X називається *ланцюгом* (*направленою множиною*), якщо для довільних її елементів x, y виконується $x \leq y \vee y \leq x$ (відповідно $\exists z (z \in X \wedge x \leq z \wedge y \leq z)$).

Підмножина X називається *сумісною множиною*, якщо для довільної її скінченної підмножини Y виконується $\exists z(z \in D \wedge \forall y(y \in Y \Rightarrow y \leq z))$, тобто $Y_D^{\Delta} \neq \varnothing$ (іншими словами підмножина Y обмежена зверху в D)[1].

Неважко показати індукцією за числом елементів, що виконується еквівалентність: X ланцюг $\Leftrightarrow$ довільна скінченна підмножина множини X має найбільший елемент.

Аналогічно встановлюється еквівалентність: X направлена множина $\Leftrightarrow$ довільна скінченна підмножина Y множини X має верхню грань в множині X ($Y_X^{\Delta} \neq \varnothing$).

Саме тому в означенні ланцюгів та направлених множин мова йде про не більше ніж двохелементні підмножини.

Прості приклади показують, що в загальному випадку для поняття сумісної множини ситуація принципово різна – обмежитися двохелементними підмножинами не можна (див. рис. 1; очевидно, множина $\{x, y, z\}$ не є сумісною множиною, оскільки вона не має верхньої грані; разом з тим, довільні її два елементи мають верхню грань). Зауважимо, що в [3, розд. 1, с. 30] при визначенні сумісних множин мова йде про двохелементні множини.

Разом з тим, з п. 3 твердження 4 (твердження в) та г) еквівалентні) про будову ч. в. м. функцій та леми 1 (п. 1 та п. 3 еквівалентні) випливає, що для ч. в. м. функцій ці два поняття сумісності множини еквівалентні: множина функцій F сумісна $\Leftrightarrow$ довільна не більш ніж двоелементна підмножина множини F сумісна.

[1] В попередньому підрозділі 3.2, присвяченому ч. в. м. $<\mathbf{F}, \subseteq>$, це поняття використовувалося саме в такому розумінні.

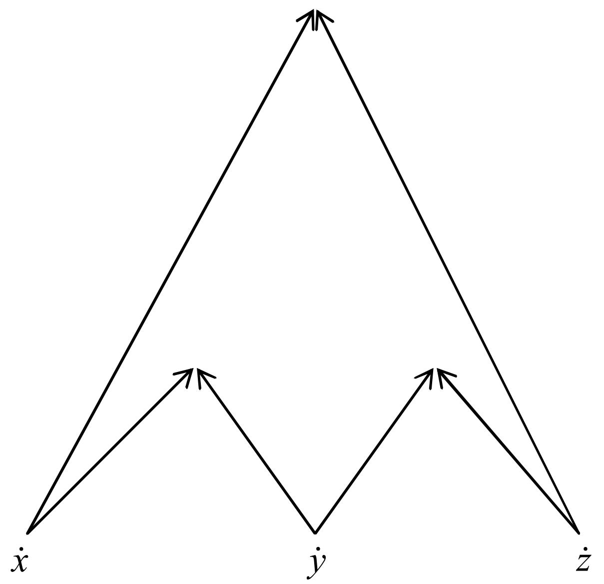

Рис. 3.1. Приклад несумісної множини ($\{x, y, z\}$), такої, що її довільна двохелементна підмножини обмежена

Очевидно, що будь-який ланцюг буде направленою множиною, а всяка направлена множина сумісна; обернені твердження, взагалі кажучи, хибні (рис. 2).

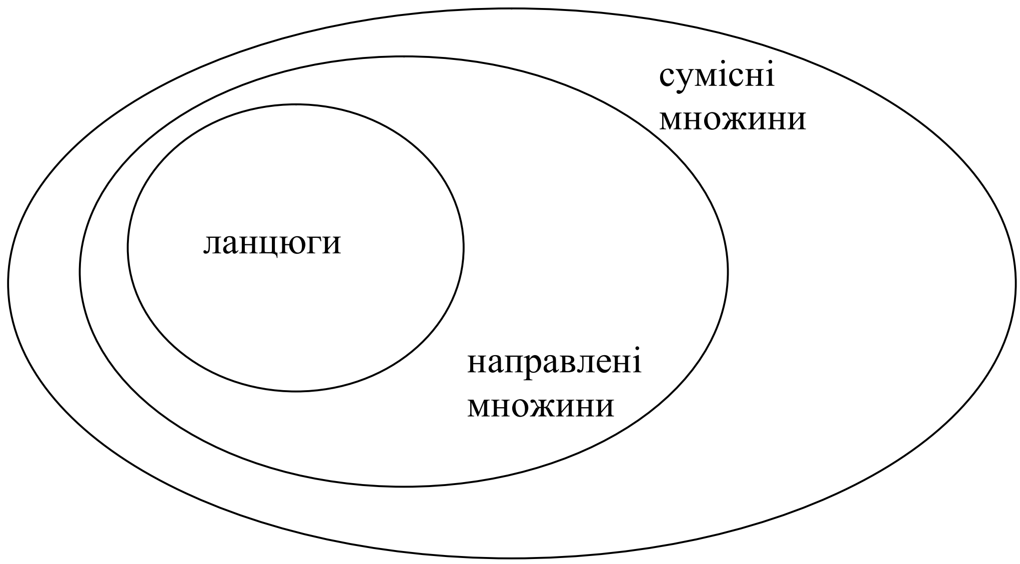

Рис. 3.2. Взаємне положення ланцюгів, направлених та сумісних множин

Ч. в. м. $< D, \leq >$ назвемо *індуктивною множиною* (*повною частково впорядкованою множиною* – п. ч. в. м., *когерентною множиною*), якщо її довільний ланцюг (відповідно довільна направлена множина, довільна сумісна множина) має супремум.

Зауважимо, що у так визначеній індуктивній множині (п. ч. в. м., когерентній множини) існує найменший елемент (або за іншою термінологією нуль, „дно”) $\perp$, оскільки найменший елемент збігається з супремумом порожньої множини, яка є одночасно ланцюгом, направленою множиною та сумісною множиною. Рівність $\coprod\varnothing=\perp$ випливає з того, що верхній конус порожньої множини збігається з універсумом – $\varnothing^{\Delta}=D$.

На відміну від [44, гл. 1, § 2; 52, § 1] ми розглядаємо конуси і порожньої множини, покладаючи $\varnothing^{\nabla}=\varnothing^{\Delta}=D$. Таке визначення дуже природне, оскільки, по-перше, повністю відповідає означенню конусів (наприклад, для верхнього конуса $X^{\Delta}\overset{def}{=}\{y|\forall x(x\in X\Rightarrow y\geq x)\}$; зрозуміло, що у випадку порожньої множини відповідна імплікація автоматично виконується для всіх y) та, по-друге, прояснює домовленості щодо точних граней порожньої множини – $\coprod\varnothing=\perp$ (найменший елемент), $\prod\varnothing=\mathbf{1}$ (найбільший елемент, або за іншою термінологією одиниця).

З огляду на вказаний вище логічний зв’язок між ланцюгами, направленими та сумісними множинами (див. рис. 3.2) очевидно, що довільна когерентна множина буде п. ч. в. м., а, в свою чергу, довільна п. ч. в. м. буде індуктивною множиною. Зазначимо, що в [3, розд. 1, § 1.2, с. 30] когерентні множини вводяться як п. ч. в. м., в яких довільні сумісні множини мають супремуми; очевидно, що це означення еквівалентне вищенаведеному.

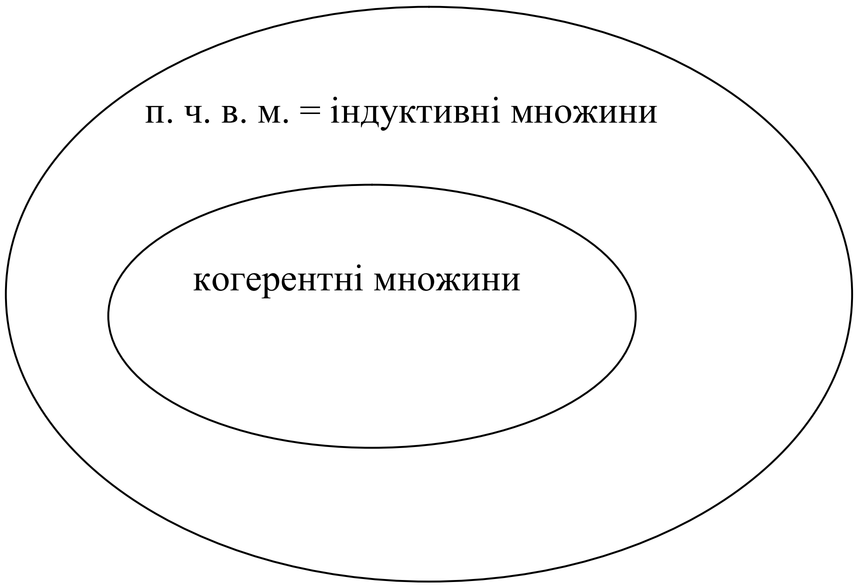

Рис. 3.3. Взаємне розташування когерентних та індуктивних множин (п. ч. в. м.)

Але виявляється, що класи п. ч. в. м. та індуктивних множин насправді співпадають, оскільки в довільній ч. в. м. існування супремумів будь-яких непорожніх направлених множин еквівалентно існуванню супремумів будь-яких непорожніх ланцюгів [32, розд. I, § 5, твердження 5.9, с. 46] (рис. 3). Це твердження є дуже нетривіальним, а доведення для загального випадку використовує аксіому вибору та трансфінітну індукцію за парами ординалів. Разом з тим для зліченних універсумів ситуація суттєво спрощується, оскільки зліченні направлені множини містять конфінальні ланцюги, що, взагалі кажучи, не виконується для незліченних направлених множин.

Твердження 3.6 (конфінальні ланцюги направлених множин та конфінальні підмножини ланцюгів) Зліченна направлена множина містить конфінальний ланцюг. Існує (незліченна) направлена множина, що не містить конфінальних ланцюгів. Довільний ланцюг містить конфінальну цілком упорядковану підмножину. □

Доведення. Перше твердження. Нехай $X \overset{def}{=} \{x_0, x_1, x_2, ...\}$ – злічена направлена множина. Індукцією по $n = 0,1,2,...$ побудуємо множину

$Y \overset{def}{=} \{y_0, y_1, y_2, ...\}$, таку, що $Y \subseteq X, X \prec Y$ та $y_0 \leq y_1 \leq y_2 \leq ...$, тобто Y – конфінальний ланцюг направленої множини X.

Базис індукції: $y_0 \overset{def}{=} x_0$. Індуктивний крок: нехай елементи $y_0, y_1, ..., y_n \in X$ вже побудовані, причому $\{x_0, x_1, ..., x_n\} \prec \{y_0, y_1, ..., y_n\}$, $y_0 \leq y_1 \leq ... \leq y_n$. Оскільки, y_n, x_{n+1} належать направленій множині X, то в ній існує елемент z, такий, що $y_n \leq z, x_{n+1} \leq z$. Покладемо $y_{n+1} \overset{def}{=} z$. Очевидно, що так побудована множина Y – шуканий конфінальний ланцюг. ▫

Слідуючи [1, розд. 1, § 2, приклад 1.2.4 на с. 23-24], дамо відповідний приклад. Нехай M – множина всіх відображень множини натуральних чисел N в себе, впорядкована так: $f_1 \leq f_2 \overset{def}{\Leftrightarrow} f_1 = f_2 \vee \forall n(f_1(n) < f_2(n))$ (очевидно, M континуальна). Очевидно, ч. в. м. $< M, \leq >$ – направлена (дійсно, для довільних функцій f_1, f_2 відповідною функцією є, наприклад, функція, що задається термом $f_1(x) + f_2(x) + 1$).

Про довільний ланцюг C в цій ч. в. м. можна сказати таке: по-перше, C не більше ніж зліченний[1], та, по-друге, існує така функція g, що $g \in C^{\Delta} \setminus C$ (тобто функція g строго більша всіх функцій ланцюга).

Перше твердження випливає з ін'єктивності відображення $f \mapsto f(0) \in N$, $f \in C$ (замість $f(0)$ можна було б взяти значення функції на довільному іншому зафіксованому числі); друге – з застосування діагональної конструкції Кантора.

Дійсно, для скінченних ланцюгів твердження очевидне; для зліченного ланцюга C (а ланцюгів більшої потужності нема), покладаючи $C \overset{def}{=} \{f_n\}_{n \in N}$, за функцію g можна взяти, наприклад, таку функцію в термальній формі

[1] Зауважимо, що в [1] під зліченними розуміються скінченні множини або нескінченні зліченні множини.

запису – $g(x) \overset{def}{=} f_x(x)+1$. З останньої властивості ланцюгів і випливає шукане твердження про неіснування конфінальних ланцюгів (формальне ж доведення проводиться від супротивного). ▫

Останнє твердження щодо конфінальних підмножин ланцюгів для зліченних ланцюгів доводиться аналогічно першому твердженню про конфінальні підмножини зліченних направлених множин; в загальному ж випадку треба застосовувати аксіому вибору (див., наприклад, [52, § 2, теорема 5, с. 26]). ▫□

Саме з останнього факту доведеного твердження і випливає, що при розгляді зліченних ланцюгів можна обмежитися ланцюгами виду $x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots$.

3.4. Умовно повні частково впорядковані множини, повні напіврешітки

Повернемось до будови ч. в. м. функцій. Нам потрібні будуть ще два загальних класа ч. в. м.

Ч. в. м. назвемо *умовно повною множиною*, якщо її довільна непорожня обмежена зверху та знизу множина має обидві точні грані [4, розд. V, § 3, с. 153].

Ч. в. м. назвемо *повною напіврешіткою*, якщо її довільна обмежена зверху множина має супремум [64, розд. 3, п. 3.19, с. 58]; зауважимо, що в згаданій монографії повні напіврешітки (*complete semilattice*) вводяться як підклас п. ч. в. м.

За аналогією з верхніми та нижніми напіврешітками в теорії решіток (див., наприклад, [52, § 4, с. 58]) тут краще було б говорити про верхню повну напіврешітку, бо, переходячи до дуальних понять, природно вводиться поняття нижньої повної напіврешітки (треба вимагати існування інфімуму для довільної обмеженої знизу множини).

Оскільки порожня множина обмежена зверху (нагадаємо, що $\varnothing^{\Delta} = D$ – універсум), то в повній напіврешітці існує найменший елемент.

Отже, ч. в. м. $< \mathbf{F}, \subseteq >$ згідно з твердженням 4 про її будову є одночасно умовно повною (згідно з п. 2 завжди існують інфімуми непорожніх множин, згідно з п. 3 існують супремуми обмежених зверху множин), когерентною множиною (згідно з п. 3 існують супремуми сумісних множин) та повною напіврешіткою (згідно з п. 3 існують супремуми обмежених зверху множин). Цей факт не випадковий, він є наслідком загального результату про збіжність вказаних понять на класі індуктивних множин, наведеного без доведення, наприклад, в [64, розд. 3, п. 3.20, лема, с. 58].

Перед тим, як дати відповідні доведення, сформулюємо природні узагальнення відомих фактів про точні грані.

Лема 3.2 (зв'язок між точними гранями). В довільній ч. в. м. виконуються узагальнені рівності $\coprod X \simeq \prod X^{\Delta}$ та $\prod X \simeq \coprod X^{\nabla}$. □

Стандартне доведення для випадку непорожніх конусів непорожніх множин (див., наприклад, [52, § 1, теореми 7, 8, с. 12; 64 розд. 2, лема 2.15, с. 33]) треба поповнити розглядом випадків порожніх конусів з використанням узагальнених рівностей $\coprod \varnothing \simeq \perp$, $\prod \varnothing \simeq \mathbf{1}$. Крім того треба розглянути і випадок порожньої множини X.

Розглянемо такі два особливі випадки для першої узагальненої рівності (друга рівність доводиться аналогічно). Нехай $X = \varnothing$, тоді $X^{\Delta} = D$ (універсум). Значення зліва $\coprod \varnothing$ визначене тоді і тільки тоді, коли існує найменший елемент $\perp$, і збігається з $\perp$ у випадку визначення: $\coprod \varnothing \simeq \perp$. Значення справа – $\prod D$, тому треба скористатися очевидною рівністю про нижній конус універсума

$$D^{\nabla} = \begin{cases} \{\perp\}, \textit{якщо} \perp \textit{існує}, \\ \varnothing, \textit{інакше}. \end{cases}$$

Як бачимо, узагальнена рівність виконується (суттєве існування або не існування найменшого елемента; по суті доведена узагальнена рівність $\prod D \simeq \perp$). ▫

Нехай тепер $X^{\Delta} = \varnothing$, тобто множина X необмежена (зверху) і, значить її супремум не існує. Покажемо, що значення справа також невизначене. Дійсно, справа маємо інфімум $\prod \varnothing$, який (інфімум) збігається з найбільшим елементом, якщо такий елемент існує; або ж інфімум не існує, якщо не існує найбільшого елемента: $\prod \varnothing \simeq \mathbf{1}$; але найбільший елемент не існує з огляду на необмеженість зверху множини X. ▫

Друга узагальнена рівність з формулювання леми випливає з першої із застосуванням принципу двоїстості. ▫□

Отже, узагальнення відомих фактів про зв'язок між точними гранями полягає в знятті обмеження на непорожність множин та їхніх конусів, а також у застосуванні узагальненої рівності для компактного запису.

Лема 3.3 (про супремум об'єднання). Нехай $\{X_i\}_{i \in I}$ довільна сім'я підмножин універсуму, причому всі супремуми $\coprod X_i$, $i \in I$ існують. Тоді виконується узагальнена рівність $\coprod \bigcup_{i \in I} X_i \simeq \coprod \{\coprod X_i | i \in I\}$. □

Доведення проводиться модифікацією стандартного доведення (див., наприклад, [18, розд. III, § 1, п. 9, твердження 6; 52, § 1, теорема 9; 21, гл. 2, § 2.5, с. 58]). □

Зауважимо, що у згаданих працях наведене послаблене формулювання: рівності супремумів встановлюється за умови існування супремума об'єднання $\bigcup_{i \in I} X_i$ та, відповідно, нічого не говориться про випадок, коли супремум такого об'єднання не існує (більш точно: у [18, розд. III, § 1, п. 9, твердження 6, с. 148] по суті наведена узагальнена рівність для випадку множини двоіндексованих елементів).

Зауважимо, що лема 3 є аналогом для ч. в. м. відомих фактів аналізу щодо рівності сум повторних та подвійних рядів (див., наприклад, [38, розд. 3, § 1, п. 1.8; 53, розд. IX, § 5]).

Твердження леми 3 можна інтерпретувати як (узагальнену) асоціативність (часткової) операції взяття супремумів (про асоціативність цієї операції особливо доречно говорити, розглядаючи клас верхніх напіврешіток).

Нарешті зауважимо, що згідно з принципом двоїстості вірний аналог леми 3 для точних нижніх граней.

В наступному твердженні наведена характеристична ознака повних напіврешіток в термінах інфімумів.

Твердження 3.7 (характеристична ознака повних напіврешіток). Ч. в. м. є повною напіврешіткою тоді і тільки тоді, коли в ній існують інфімуми довільних непорожніх множин. □

Доведення почнемо з необхідності. Нехай множина $X \neq \varnothing$, згідно з лемою 2 виконується узагальнена рівність $\prod X \simeq \coprod X^{\nabla}$. Залишається встановити обмеженість зверху нижнього конуса X^{∇}, тобто непорожність верхнього конуса вигляду $X^{\nabla\Delta}$ (точніше кажучи, йдеться про конус вигляду $(X^{\nabla})^{\Delta}$). Для цього треба застосувати відоме включення $X \subseteq X^{\nabla\Delta}$ (див., наприклад, [52, § 1, теорема 5, с. 11]). ▫

Достатність безпосередньо випливає з рівності $\coprod X \simeq \prod X^{\Delta}$ (лема 2 про зв'язок між точними гранями). ▫□

Доведене твердження прояснює роль п. 2 з твердження 4 про будову ч. в. м. функцій; нагадаймо, що згідно з п. 3 цього твердження існують супремуми обмежених зверху множин, а згідно з п. 2 – інфімуми непорожніх множин; твердження 7 саме й встановлює еквівалентність цих умов (інша справа, що в п. 2 твердження 4 вказується явний вигляд інфімумів).

Далі 2^X – множина всіх скінченних підмножин множини X.

Лема 3.4 (зображення супремумів сумісних множин в повних напівгратках). Нехай X – сумісна підмножина повної напівгратки, тоді виконується узагальнена рівність $\coprod X \simeq \coprod\{\coprod Y \mid Y \in 2^X\}$, причому множина супремумів $\{\coprod Y \mid Y \in 2^X\}$ направлена. □

Доведення. Спочатку зауважимо, що довільна скінченна підмножина сумісної множини обмежена зверху, отже має супремум за означенням повної напівгратки; таким чином, супремуми вигляду $\coprod Y, Y \in 2^X$ існують. Очевидно, $X = \bigcup 2^X$ і залишається застосувати лему 3 про супремум об'єднання. ▫

Покажемо, що множина $\{\coprod Y \mid Y \in 2^X\}$ направлена. Дійсно, нехай $Y_1, Y_2 \in 2^X$, тоді $Y_1 \bigcup Y_2 \in 2^X$, причому $\coprod Y_i \le \coprod (Y_1 \bigcup Y_2)$, $i = 1,2$ згідно з добре відомими властивостями точних граней (див., наприклад, [52, § 1, теорема 6, с. 12]). ▫□.

Очевидно, клас когерентних множин включається в клас повних півграток (дійсно, всяка обмежена зверху множина є сумісною; див. рис. 4, 5).

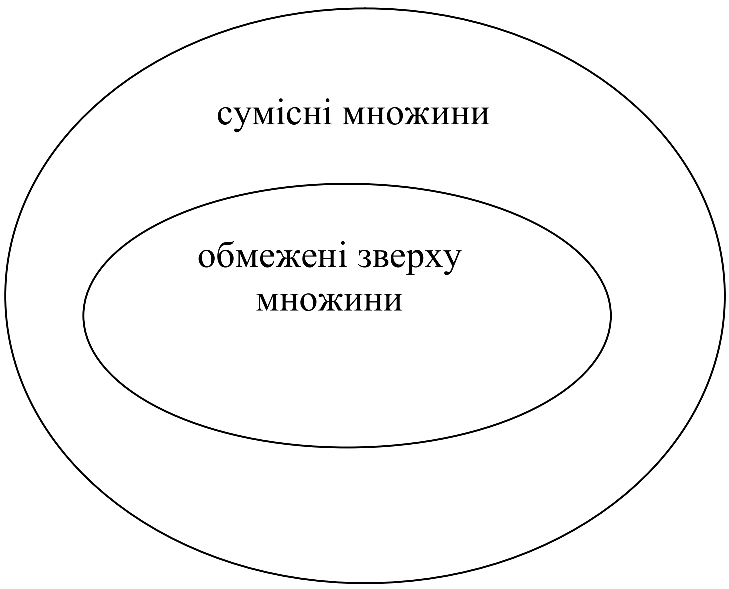

Рис. 3.4. Взаємне розташування обмежених зверху та сумісних множин

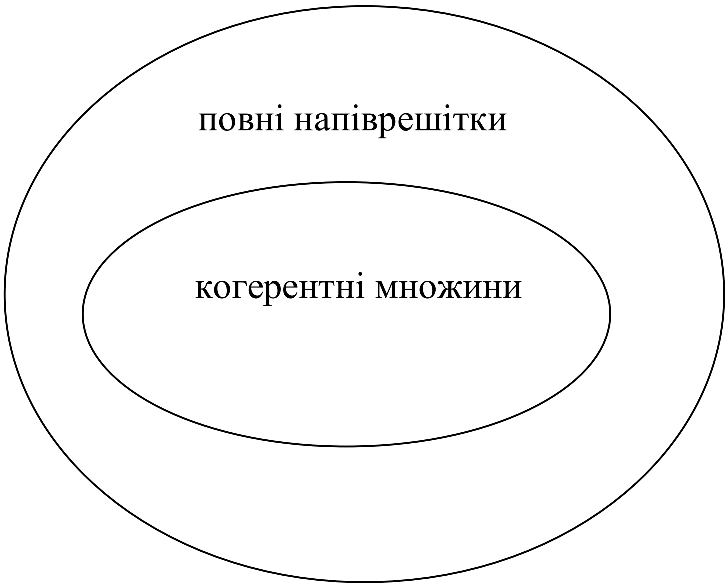

Рис. 3.5. Взаємне розташування когерентних множин та повних напіврешіток у загальному випадку

Про обернене включення говорить наступне твердження.

Твердження 3.8. В класі індуктивних множин (еквівалентно: в класі п. ч. в. м.) всяка повна напіврешітка є когерентною множиною.

Доведення спирається на лему 4.

Звідси та із загального зв'язку між когерентними множинами та повними напіврешітками (див. рис. 5) безпосередньо випливає наступний наслідок, твердження якого демонструє рис. 6.

Рис. 3.6. Рівність класів когерентних множин та повних напіврешіток в класі індуктивних множин (п. ч. в. м.)

Наслідок 3.2. В класі індуктивних множин (еквівалентно: в класі п. ч. в. м.) поняття повної напіврешітки збігається з поняттям когерентної множини. □

Це і є те саме загальне твердження, яке проявляється для ч. в. м. функцій.

Нарешті, наведемо результат про зв'язок між повними напіврешітками та повними решітками, який доповнює твердження 7 (характеристична ознака повних напіврешіток).

Твердження 3.9 (характеристична ознака повних напіврешіток, зв'язок з повними решітками). Ч. в. м. є повною піврешіткою тоді і тільки тоді, коли її поповнення найбільшим елементом є повною решіткою. Іншими словами, якщо позначити ординальну суму ч. в. м. (в розумінні [52, §1, с. 15]) через $\oplus$, то виконується еквівалентність: ч. в. м. D є повною напіврешіткою $\Leftrightarrow$ ч. в. м. $D \oplus \mathbf{1}$ є повною решіткою. □

Доведення почнемо з необхідності. Нехай ч. в. м. D є повною напіврешіткою, поповнимо її найбільшим елементом **1** і покажимо, що при цьому отримується повна решітка. Враховуючи зв'язок між точними гранями (лема 2), достатньо показати існування супремумів довільних підмножин.

Отже, нехай X довільна підмножина. Випадок, коли $\mathbf{1} \in X$, тривіальний, тому далі покладається, що $\mathbf{1} \notin X$, тобто $X \subseteq D$. Очевидно, що $X^{\Delta}_{D\oplus\mathbf{1}} = X^{\Delta}_{D} \cup \{\mathbf{1}\}$. Розглянемо два можливих випадки.

По-перше, нехай множина X обмежена зверху в D (тобто $X^{\Delta}_{D} \neq \varnothing$), оскільки D є повною напіврешіткою, то верхній конус X^{Δ}_{D} містить найменший елемент. Очевидно, що верхній конус $X^{\Delta}_{D\oplus\mathbf{1}}$ також містить найменший елемент (який збігається з найменшим елементом верхнього конуса X^{Δ}_{D}); значить, супремум $\coprod_{D\oplus\mathbf{1}} X$ існує (та збігається з супремумом $\coprod_{D} X$).

По-друге, нехай множина X необмежена зверху в D (тобто $X^{\Delta}_{D} = \varnothing$); тоді $X^{\Delta}_{D\oplus\mathbf{1}} = \{\mathbf{1}\}$, тобто цей верхній конус знову має найменший елемент (точніше кажучи, $\coprod_{D\oplus\mathbf{1}} X = \mathbf{1}$). ▫

Достатність. Перевіримо, що множина елементів повної решітки без найбільшого елемента за індукованим порядком буде повною напіврешіткою. Для цього розглянемо довільну обмежену зверху в D множину X (яка, звісно, не включає найбільшого елемента повної решітки), тобто виконується $X^{\Delta}_{D} \neq \varnothing$; треба перевірити, що $\coprod_{D} X$ існує.

Очевидно, що $\coprod_{D\oplus\mathbf{1}} X \in D$ (цей факт перевіряється від супротивного з використанням рівності $X^{\Delta}_{D\oplus\mathbf{1}} = X^{\Delta}_{D} \cup \{\mathbf{1}\}$; дійсно, якщо $\coprod_{D\oplus\mathbf{1}} X = \mathbf{1}$, то множина X не є обмеженою зверху в D). Тоді згідно з відомим результатом про зв'язок між точними гранями за вихідним і індукованим порядками маємо (див., наприклад, [52, § 1, теорема 10, с. 13]): супремум $\coprod_{D} X$ існує (причому співпадає з супремумом $\coprod_{D\oplus\mathbf{1}} X$). ▫□

Таким чином, тільки наявність найбільшого елементу (в еквівалентній формі: існування інфімума порожньої множини; див. твердження 7) відрізняє повні решітки від повних напіврешіток.

Подальші властивості ч. в. м. часткових функцій (компактні елементи, алгебричність, топологія Скотта, що співпадає з топологією додатної інформації в розумінні [26, гл. 10, § 1, с. 195]) наведені, наприклад, в [3, підрозділ 1.2, твердження 1.2.31, с. 31; 6; 17, підрозділ 2.3, с. 87-89].

З приводу умовної повноти в решітках див., наприклад, [4, розд. V, § 3, с. 153-154].

Основні результати розділу 3 наступні.

1. Наведені основні властивості відношень конфінальності та коініціальності множин: рефлексивність, транзитивність, впорядкування сім'ї дискретних множин.

2. Досліджена будова частково впорядкованої множини функцій, впорядкованих за включенням графіків $<\mathbf{F},\subseteq>$: існування найменшого елементу, критерій існування найбільшого елементу, критерій існування супремуму сім'ї функцій.

3. Досліджено логічний зв'язок між: повними напіврешітками, когерентними та індуктивними множинами; обмеженими зверху та сумісними множинами.

4. Показано, що сім'я повних напіврішіток збігається з сім'єю когерентних множин в класі індуктивних множин.

5. Встановлено зв'язок між повними напіврешітками та повними решітками.

Основні результати та їх інтерпретація наведені в таблиці 1.

Таблиця 3.1 – Основні результати розділу 3

№ п.п.	**Твердження**	**Стисле формулювання**	**Інтерпретація**
(1)	(2)	(3)	(4)
1.	Твердження 3.1.	Відношення конфінальності частково впорядковує сім'ю дискретних множин.	Відношення конфінальності, яке є передпорядком, на сім'ї дискретних множин переходить в порядок. Дискретність множин – достатня умова для антисиметричності відношення конфінальності.
2.	Твердження 3.3.	$X^{\Delta} = Y^{\Delta}$, $\coprod X \simeq \coprod Y$, якщо Y конфінальна підмножина множини X .	Питання про супремум множини зводиться до такого ж питання для її конфінальної піжмножини.
3.	Лема 3.1.	$f \approx g \;\Leftrightarrow\; f \bigcup g$ – функція $\Leftrightarrow \{f, g\}$ – сумісна множина $\Leftrightarrow\; g \mid domf \subseteq f$	Критерії функціональності об'єднання двох функцій.

(1)	(2)	(3)	(4)
4.	Твердження 3.4.	$f_{\varnothing}$ – «дно» ч. в. м. $<\mathbf{F},\subseteq>$; $\prod F = \bigcap_{f\in F} f$, $\varnothing \neq F \subseteq \mathbf{F}$; $\coprod F$ – існує $\Leftrightarrow F^{\Delta} \neq \varnothing \Leftrightarrow F$ – сумісна $\Leftrightarrow \forall f \forall g (f, g \in F \Rightarrow f \approx g)$ $\Leftrightarrow \bigcup_{f\in F} f$ – функціональне; $\coprod F = \bigcup_{f\in F} f$ за умови існування $\coprod F$.	Будова сім'ї функцій, впорядкованих за включенням графіків, $<\mathbf{F},\subseteq>$.
5.	Твердження 3.5.	Всі атоми ч. в. м. $<\mathbf{F},\subseteq>$ мають вигляд $f_x^y : \{x\} \to \{y\}$.	Атоми ч. в. м. $<\mathbf{F},\subseteq>$ – функції з одноелементним графіком.
6.	Твердження 3.6.	Зліченна направлена множина містить конфінальний ланцюг. Існує незліченна направлена множина, що не містить конфінальних ланцюгів. Довільний ланцюг містить конфінальну цілком упорядковану підмножину.	Описані конфінальні ланцюги направлених множин та конфінальні підмножини ланцюгів.
7.	Лема 3.2.	$\coprod X \simeq \prod X^{\Delta}$, $\prod X \simeq \coprod X^{\nabla}$	Зв'язок між точними гранями в термінах конусів.

(1)	(2)	(3)	(4)
8.	Лема 3.3.	$\coprod \bigcup_{i \in I} X_i \simeq \coprod \{ \coprod X_i \mid i \in I \}$	Узагальнена асоціативність операції взяття супремуму.
9.	Твердження 3.7.	Ч. в. м. є повною напіврешіткою $\Leftrightarrow$ $\forall X (X \neq \varnothing \Rightarrow \prod X$ існує$)$.	Характеристична ознака повних напіврешіток.
10.	Лема 3.4.	$\coprod X \simeq \coprod \{ \coprod Y \mid Y \in 2^X \}$,де X – сумісна підмножина повної напіврешітки.	Зображення супремумів сумісних підмножин в повних напіврешітках.
11.	Наслідок 3.2.	В класі індуктивних множин поняття збігається з поняттям когерентної множини.	Достатні умови збіжності понять повної напіврешітки та когерентної множини.
12.	Твердження 3.9.	ч. в. м. D є повною піврешіткою $\Leftrightarrow$ ч. в. м. $D \oplus \mathbf{1}$ є повною решіткою.	Зв’язок між повними напіврешітками та повними решітками: тільки наявність найбільшого елемента відрізняє повні решітки від повних напіврешіток.

РОЗДІЛ 4. ІН’ЄКТИВНІ ВІДНОШЕННЯ, УЗАГАЛЬНЕНЕ З’ЄДНАННЯ ТА УЗАГАЛЬНЕНИЙ ПРЯМИЙ ДОБУТОК

4.1. Критерії ін’єктивності відношень

Для встановлення подальшого критерію ін’єктивності відношень потрібна буде наступна лема.

Лема 4.1. Виконується твердження

$$\forall XY(X,Y \subseteq \pi_1^2 U \Rightarrow (U[X] \bigcap U[Y] = \varnothing \Rightarrow X \bigcap Y = \varnothing)). \ \square$$

Доведення. Розглянемо дві довільні множини X,Y, такі, що $X,Y \subseteq \pi_1^2 U$ та $U[X] \bigcap U[Y] = \varnothing$; покажемо, що тоді виконується шукана рівність $X \bigcap Y = \varnothing$.

Оскільки $U[X \bigcap Y] \subseteq U[X] \bigcap U[Y]$ (згідно з п. 3 твердження 2.2 про властивості повного образу) та $U[X] \bigcap U[Y] = \varnothing$ за припущенням, то $U[X \bigcap Y] = \varnothing$. Тоді згідно з критерієм порожності повного образу (п. 6 того ж твердження 2.2) $X \bigcap Y \bigcap \pi_1^2 U = \varnothing$; звідси, оскільки за припущенням $X,Y \subseteq \pi_1^2 U$, випливає шукана рівність $X \bigcap Y = X \bigcap Y \bigcap \pi_1^2 U = \varnothing$. $\square$

Зробимо два загальних зауваження щодо доведеної леми: по-перше, прості приклади показують, що зняти обмеження на множини вигляду $X,Y \subseteq \pi_1^2 U$, взагалі кажучи, не можна (тобто не можна розширити область дії кванторів загальності, найпростіший приклад – це випадок порожнього відношення U); по-друге, як буде показано далі (п. 2 твердження 1), імплікація леми $U[X] \bigcap U[Y] = \varnothing \Rightarrow X \bigcap Y = \varnothing$ обертається для ін’єктивних і тільки для ін’єктивних відношень (причому в даному випадку область дії кванторів можна розширити: множини X,Y довільні).

Як і в розділі 2 у подальшому з метою спрощення позначень повні образи одноелементних множин (сінглтонів) вигляду $U[\{x\}]$ будемо позначати через $U[x]$.

Твердження 4.1 (критерії ін’єктивності відношень). Наступні твердження еквівалентні:

1) U – ін’єктивне відношення, (4.1)

2) $\forall XY(X \cap Y = \varnothing \Rightarrow U[X] \cap U[Y] = \varnothing)$, (4.2)

3) $\forall xy(x \neq y \Rightarrow U[x] \cap U[y] = \varnothing)$, (4.3)

4) $\forall XY(X, Y \subseteq \pi_1^2 U \Rightarrow (U[X] \cap U[Y] = \varnothing \Leftrightarrow X \cap Y = \varnothing))$, (4.4)

5) $\forall xy(x, y \in \pi_1^2 U \Rightarrow (U[x] \cap U[y] = \varnothing \Leftrightarrow x \neq y)$. □ (4.5)

Доведення. Встановимо ланцюжок імплікацій $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5) \Rightarrow (1)$.

Імплікація $(1) \Rightarrow (2)$ встановлюється від супротивного: нехай U ін'єктивне відношення, але існують множини X, Y, такі, що $X \cap Y = \varnothing$ та $U[X] \cap U[Y] \neq \varnothing$. Тоді існує елемент z, такий, що $z \in U[X] \cap U[Y]$; з означення повного образу випливає, що існують елементи x, y, такі, що $x \in X$, $y \in Y$ та $<x, z> \in U$, $<y, z> \in U$. Оскільки множини X, Y не перетинаються, то елементи x, y різні, а це суперечить ін'єктивності відношення U. ▫

Імплікація $(2) \Rightarrow (3)$ тривіальна, оскільки, змістовно кажучи, в твердженні (3) область дії кванторів загальності з твердження (2) просто звужується на сінглтони. ▫

Встановимо імплікацію $(3) \Rightarrow (4)$. Нехай виконується імплікація (3), розглянемо довільні множини X, Y, такі, що $X, Y \subseteq \pi_1^2 U$. Імплікація $U[X] \cap U[Y] = \varnothing \Rightarrow X \cap Y = \varnothing$ виконується згідно з лемою 1 і тому залишається встановити лише обернену імплікацію $X \cap Y = \varnothing \Rightarrow U[X] \cap U[Y] = \varnothing$. Подальше доведення проводиться від супротивного аналогічно доведенню імплікації $(1) \Rightarrow (2)$.

Дійсно, нехай $X \cap Y = \varnothing$, але $U[X] \cap U[Y] \neq \varnothing$. Тоді існує елемент z, такий, що $z \in U[X] \cap U[Y]$; звідси випливає, що існують елементи x, y, такі, що $x \in X$, $y \in Y$ та $<x, z> \in U$, $<y, z> \in U$. Оскільки множини X, Y не перетинаються, то елементи x, y різні; отже згідно з твердженням (3) має місце рівність $U[x] \cap U[y] = \varnothing$. З іншого боку $z \in U[x] \cap U[y]$ – прийшли до суперечності. ▫

Імплікація $(4) \Rightarrow (5)$ тривіальна, оскільки, змістовно кажучи, в твердженні (5) область дії кванторів загальності з твердження (4) просто звужується на сінглтони (повністю аналогічно як при доведенні імплікації $(2) \Rightarrow (3)$). ▫

Останню імплікацію $(5) \Rightarrow (1)$ встановимо від супротивного: нехай виконується твердження (5), але відношення U не є ін'єктивним. Тоді згідно з означенням існують елементи x, y, z, такі, що $<x,z> \in U$, $<y,z> \in U$, причому $x \neq y$. Звідси випливає, що $z \in U[x] \bigcap U[y]$, тобто останній перетин $U[x] \bigcap U[y]$ непорожній. Але згідно з твердженням (5) та з огляду те, що $x \neq y$, виконується рівність $U[x] \bigcap U[y] = \varnothing$; отже прийшли до суперечності. ▫□

Прокоментуємо доведені критерії ін'єктивності. Твердження (2) – „базовий" критерій ін'єктивності, твердження (3) отримується з (2) обмеженням області дії кванторів загальності на сінглтони; нарешті, якщо в твердженні (2) (відповідно (3)) обмежити область дії кванторів загальності підмножинами проекції $\pi_1^2 U$ (відповідно елементами проекції $\pi_1^2 U$), то імплікація цього твердження $X \bigcap Y = \varnothing \Rightarrow U[X] \bigcap U[Y] = \varnothing$ (відповідно $x \neq y \Rightarrow U[x] \bigcap U[y] = \varnothing$) обертається. Як зазначалося вище, для обернення імплікацій суттєве звуження області дії кванторів загальності.

Крім того, аналіз доведення твердження 1 та врахування леми 1 показує, що виконується і такий критерій ін'єктивності відношень.

Твердження 4.1′ (критерії ін'єктивності відношень). Наступні твердження еквівалентні:

1) U – ін'єктивне відношення,

2) $\forall XY(X,Y \subseteq \pi_1^2 U \Rightarrow (X \bigcap Y = \varnothing \Rightarrow U[X] \bigcap U[Y] = \varnothing))$, (4.4′)

3) $\forall xy(x,y \in \pi_1^2 U \Rightarrow (x \neq y \Rightarrow U[x] \bigcap U[y] = \varnothing))$.□ (4.5′)

Прямі доведення проводяться повністю аналогічно твердженню 1. Крім того можна скористатися твердженням 1, опускаючи в еквівалентностях (4), (5) загальнозначні імплікації (з леми 1).□

Твердження (4′) простіше твердження (4), оскільки еквівалентність замінена на одну імплікацію (обернена загальнозначна імплікація з формулювання леми 1 просто опущена). Ці ж міркування застосовні і до твердження (5′).

Очевидно, властивість ін'єктивності не зберігається при об'єднанні ін'єктивних відношень (аналогічно властивості функціональності при об'єднанні функціональних відношень, див. підрозділ 3.2). У наступному твердженні наведений критерій ін'єктивності об'єднання ін'єктивних відношень. При цьому будемо спиратися на зв'язок між функціональними та ін'єктивними відношеннями та на критерій функціональності об'єднання функціональних відношень в термінах відношення сумісності відношень $\approx$ (див. підрозділи 2.1 та 3.2).

Твердження 4.2 (критерій ін'єктивності об'єднання ін'єктивних відношень). Нехай U_1, U_2 ін'єктивні відношення. Тоді виконується еквівалентність: об'єднання $U_1 \bigcup U_2$ ін'єктивне $\Leftrightarrow$ $U_1^{-1} \approx U_2^{-1}$. □

Доведення. Згідно з твердженням 2.1 відношення є ін'єктивним тоді і тільки тоді, коли обернене відношення є функціональним; крім того, згідно з лемою 3.1 об'єднання двох функцій є функцією тоді і тільки тоді, коли функції сумісні. Отже, маємо ланцюжок еквівалентностей:

$U_1 \bigcup U_2$ ін'єктивно $\Leftrightarrow$ $(U_1 \bigcup U_2)^{-1}$ функціонально $\Leftrightarrow$ $U_1^{-1} \bigcup U_2^{-1}$ функціонально $\Leftrightarrow$ $U_1^{-1} \approx U_2^{-1}$.

В другому переході скористалися дистрибутивністю взяття оберненого відношення відносно об'єднань, в третьому – функціональністю відношень U_1^{-1}, U_2^{-1} (що випливає з ін'єктивності вихідних відношень). □

З доведення останнього твердження випливає, що цей критерій по суті є переформулюванням критерію функціональності об'єднання функцій.

Спростимо критерій твердження 2 за рахунок додаткової умови сумісності ін'єктивних відношень, які об'єднуються. Для доведення спрощеного критерію знадобиться наступна лема.

Лема 4.2. Нехай U_1, U_2 сумісні відношення, покладемо $X \overset{def}{=} \pi_1^2 U_1 \bigcap \pi_1^2 U_2$. Тоді виконуються твердження

1) $\forall Y(Y \subseteq X \Rightarrow U_1[Y] = U_2[Y])$, (4.6)

2) $\forall Y(Y \subseteq X \Rightarrow U_1 \mid Y = U_2 \mid Y)$. □ (4.7)

Доведення. Почнемо з твердження (6). Нехай Y довільна підмножина множини X (отже $Y = X \bigcap Y$). Застосовуючи рівність $(U \mid Z_1)[Z_2] = U[Z_1 \bigcap Z_2]$ (твердження 2.11 про властивості обмеження, п. 11) та сумісність відношень U_1, U_2 (тобто рівність $U_1 \mid X = U_2 \mid X$), маємо ланцюжок рівностей $U_1[Y] = U_1[X \bigcap Y] = (U_1 \mid X)[Y] = (U_2 \mid X)[Y] = U_2[X \bigcap Y] = U_2[Y]$.▫

Встановимо твердження (7). Нехай знову Y довільна підмножина множини X. За означенням сумісності відношень виконується рівність $U_1 \mid X = U_2 \mid X$; візьмемо обмеження від обох частин останньої рівності за множиною Y, тоді маємо рівність $(U_1 \mid X) \mid Y = (U_2 \mid X) \mid Y$. Залишається використати рівності $(U_1 \mid X) \mid Y = U_1 \mid (X \bigcap Y) = U_1 \mid Y$ та $(U_2 \mid X) \mid Y = U_2 \mid (X \bigcap Y) = U_2 \mid Y$ (твердження 2.11 про властивості обмеження, п. 5 про композицію обмежень). Отже, шукана рівність $U_1 \mid Y = U_2 \mid Y$ доведена. ▫□

Встановлена лема має дуже просту змістовну інтерпретацію: оскільки відношення U_1, U_2 сумісні, тобто вони „ведуть себе однаково" на множині X (яка є перетином проекцій за першою компонентою цих відношень), то вказані відношення „ведуть себе однаково" і на довільній підмножині множини X.

Сформулюємо спрощений критерій.

Твердження 4.3 (критерій ін'єктивності об'єднання ін'єктивних сумісних відношень). Нехай U_1, U_2 ін'єктивні сумісні відношення (тобто $U_1 \approx U_2$). Тоді виконується еквівалентність

об'єднання $U_1 \bigcup U_2$ ін'єктивне $\Leftrightarrow$ $U_1[\pi_1^2 U_1 \setminus \pi_1^2 U_2] \bigcap U_2[\pi_1^2 U_2 \setminus \pi_1^2 U_1] = \varnothing$. □

Доведення почнемо з необхідності. Отже, нехай об'єднання $U_1 \bigcup U_2$ ін'єктивно. Використовуючи дистрибутивність повного образу (твердження 2.2 про властивості повного образу, п. 2) та критерій порожності повного образу (то ж саме твердження 2.2, п. 6), маємо ланцюжок рівностей $(U_1 \bigcup U_2)[\pi_1^2 U_1 \setminus \pi_1^2 U_2] = U_1[\pi_1^2 U_1 \setminus \pi_1^2 U_2] \bigcup U_2[\pi_1^2 U_1 \setminus \pi_1^2 U_2] = U_1[\pi_1^2 U_1 \setminus \pi_1^2 U_2]$. В останньому переході скористались тим, що $U_2[\pi_1^2 U_1 \setminus \pi_1^2 U_2] = \varnothing$, оскільки $\pi_1^2 U_2 \bigcap (\pi_1^2 U_1 \setminus \pi_1^2 U_2) = \varnothing$. Таким чином, маємо рівність

$$(U_1 \bigcup U_2)[\pi_1^2 U_1 \setminus \pi_1^2 U_2] = U_1[\pi_1^2 U_1 \setminus \pi_1^2 U_2]. \qquad (4.8)$$

Рівність

$$(U_1 \bigcup U_2)[\pi_1^2 U_2 \setminus \pi_1^2 U_1] = U_2[\pi_1^2 U_2 \setminus \pi_1^2 U_1] \qquad (4.9)$$

перевіряється повністю аналогічно (відношення U_1, U_2 просто міняються ролями).

Оскільки множини $\pi_1^2 U_1 \setminus \pi_1^2 U_2$ та $\pi_1^2 U_2 \setminus \pi_1^2 U_1$ не перетинаються, а відношення $U_1 \bigcup U_2$ ін'єктивне за припущенням, то згідно з критерієм ін'єктивності (твердження 1, формула (2)) маємо рівність $(U_1 \bigcup U_2)[\pi_1^2 U_1 \setminus \pi_1^2 U_2] \bigcap (U_1 \bigcup U_2)[\pi_1^2 U_2 \setminus \pi_1^2 U_1] = \varnothing$. Використовуючи встановлені рівності (8) та (9), приходимо до шуканої рівності $U_1[\pi_1^2 U_1 \setminus \pi_1^2 U_2] \bigcap U_2[\pi_1^2 U_2 \setminus \pi_1^2 U_1] = \varnothing$. Зауважимо, що при доведенні необхідності сумісність відношень не використовувалась. ▫

Доведемо достатність. Нехай U_1, U_2 ін'єктивні сумісні відношення та виконується рівність $U_1[\pi_1^2 U_1 \setminus \pi_1^2 U_2] \bigcap U_2[\pi_1^2 U_2 \setminus \pi_1^2 U_1] = \varnothing$; покажемо, що об'єднання $U_1 \bigcup U_2$ є ін'єктивним, спираючись на критерій ін'єктивності з твердження 1′, а саме на формулу (4′).

Почнемо із знаходження проекції за першою компонентою відношення $U_1 \bigcup U_2$. Оскільки проекція дистрибутивна відносно об'єднань, то $\pi_1^2(U_1 \bigcup U_2) = \pi_1^2 U_1 \bigcup \pi_1^2 U_2$. А тепер розглянемо дві довільні множини X, Y, такі, що $X, Y \subseteq \pi_1^2 U_1 \bigcup \pi_1^2 U_2$ та $X \bigcap Y = \varnothing$.

Очевидно, що $X = X_1 \bigcup X_2 \bigcup X_3$, де $X_1 \overset{def}{=} X \bigcap (\pi_1^2 U_1 \setminus \pi_1^2 U_2)$, $X_2 \overset{def}{=} X \bigcap \pi_1^2 U_1 \bigcap \pi_1^2 U_2$ та $X_3 \overset{def}{=} X \bigcap (\pi_1^2 U_2 \setminus \pi_1^2 U_1)$. Очевидно також, що множини X_1, X_2, X_3 не перетинаються, тобто йдеться про розбиття множини X (див. рис. 1).

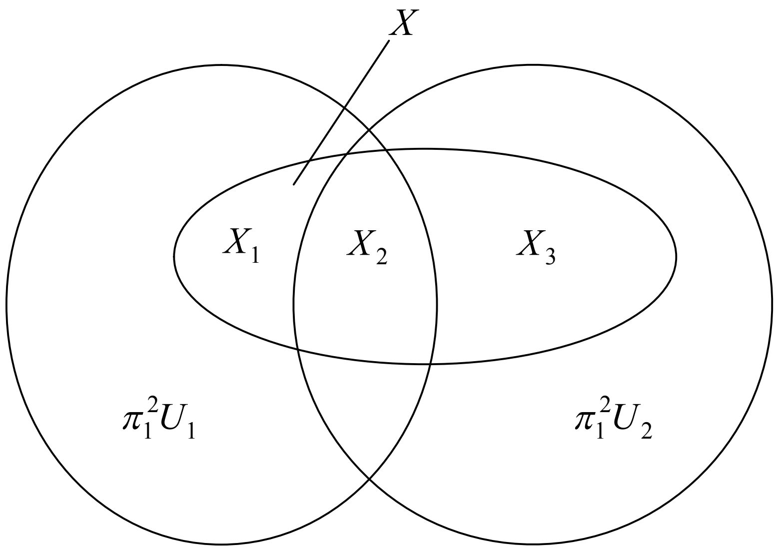

Рис. 4.1. Доведення достатності твердження 3: розбиття множини X

Повністю аналогічно: очевидно, що $Y = Y_1 \bigcup Y_2 \bigcup Y_3$, де $Y_1 \overset{def}{=} Y \bigcap (\pi_1^2 U_1 \setminus \pi_1^2 U_2)$, $Y_2 \overset{def}{=} Y \bigcap \pi_1^2 U_1 \bigcap \pi_1^2 U_2$ та $Y_3 \overset{def}{=} Y \bigcap (\pi_1^2 U_2 \setminus \pi_1^2 U_1)$; причому множини Y_1, Y_2, Y_3 не перетинаються; тобто знову йдеться про розбиття на цей раз множини Y (рисунок для цього випадку будується з рис. 1 заміною множин X, X_1, X_2, X_3 на множини Y ,Y_1, Y_2, Y_3 відповідно).

Оскільки множини X, Y не перетинаються, то очевидно, що множини X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3 формують розбиття об'єднання $X \bigcup Y$.

Знайдемо повний образ вигляду $(U_1 \bigcup U_2)[X]$. Використовуючи дистрибутивність повного образу відносно об'єднань, критерій порожності повного образу (з якого випливають рівності $U_2[X_1] = U_1[X_3] = \varnothing$) та рівність (6) леми 2 (а саме $U_1[X_2] = U_2[X_2]$), маємо ланцюжок рівностей $(U_1 \bigcup U_2)[X] = (U_1 \bigcup U_2)[X_1 \bigcup X_2 \bigcup X_3] = U_1[X_1] \bigcup U_2[X_1] \bigcup U_1[X_2] \bigcup U_2[X_2] \bigcup$ $\bigcup U_1[X_3] \bigcup U_2[X_3] = U_1[X_1] \bigcup U_1[X_2] \bigcup U_2[X_3]$. Отже, встановлена рівність $(U_1 \bigcup U_2)[X] = U_1[X_1] \bigcup U_1[X_2] \bigcup U_2[X_3]$.

Аналогічно встановлюється рівність $(U_1 \bigcup U_2)[Y] = U_1[Y_1] \bigcup U_1[Y_2] \bigcup U_2[Y_3]$.

Залишається показати порожність перетину повних образів, використовуючи знайдені рівності; згідно із стандартними теоретико-множинними співвідношеннями, маємо ланцюжок рівностей:

$$(U_1 \bigcup U_2)[X] \bigcap (U_1 \bigcup U_2)[Y] =$$
$$= (U_1[X_1] \bigcup U_1[X_2] \bigcup U_2[X_3]) \bigcap (U_1[Y_1] \bigcup U_1[Y_2] \bigcup U_2[Y_3]) =$$
$$= (U_1[X_1] \bigcap U_1[Y_1]) \bigcup (U_1[X_1] \bigcap U_1[Y_2]) \bigcup (U_1[X_1] \bigcap U_2[Y_3]) \bigcup (U_1[X_2] \bigcap U_1[Y_1]) \bigcup$$
$$\bigcup (U_1[X_2] \bigcap U_1[Y_2]) \bigcup (U_1[X_2] \bigcap U_2[Y_3]) \bigcup (U_2[X_3] \bigcap U_1[Y_1]) \bigcup (U_2[X_3] \bigcap U_1[Y_2]) \bigcup$$
$$\bigcup (U_2[X_3] \bigcap U_2[Y_3]) = (U_1[X_1] \bigcap U_2[Y_3]) \bigcup (U_2[X_3] \bigcap U_1[Y_1]).$$

Вище використали рівності $U_1[X_1] \bigcap U_1[Y_1] = \varnothing$, $U_1[X_1] \bigcap U_1[Y_2] = \varnothing$, $U_1[X_2] \bigcap U_1[Y_1] = \varnothing$, $U_1[X_2] \bigcap U_1[Y_2] = \varnothing$, $U_1[X_2] \bigcap U_2[Y_3] = U_2[X_2] \bigcap U_2[Y_3] = \varnothing$ та $U_2[X_3] \bigcap U_1[Y_2] = U_2[X_3] \bigcap U_2[Y_2] = \varnothing$, $U_2[X_3] \bigcap U_2[Y_3] = \varnothing$, які випливають, по-перше, з ін'єктивності відношень U_1, U_2, по-друге, того факту, що множини X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3 попарно не перетинаються, а також, по-третє, з формули (2). Крім того застосовувалась сумісність відношень, включення $X_2, Y_2 \subseteq X$ та рівність (6) з леми 2 (наприклад, рівність $U_1[X_2] \bigcap U_2[Y_3] = U_2[X_2] \bigcap U_2[Y_3]$ отримується саме так).

Отож, маємо рівність

$(U_1 \bigcup U_2)[X] \bigcap (U_1 \bigcup U_2)[Y] = (U_1[X_1] \bigcap U_2[Y_3]) \bigcup (U_2[X_3] \bigcap U_1[Y_1])$.

Тепер врахуємо наступне включення (верхню оцінку останнього об'єднання)

$(U_1[X_1] \bigcap U_2[Y_3]) \bigcup (U_2[X_3] \bigcap U_1[Y_1]) \subseteq U_1[\pi_1^2 U_1 \setminus \pi_1^2 U_2] \bigcap U_2[\pi_1^2 U_2 \setminus \pi_1^2 U_1]$, яке випливає з означень множин X_1, X_3, Y_1, Y_3 та з монотонності повного образу (твердження 1.2 про властивості повного образу, п. 1). З цього включення та рівності $U_1[\pi_1^2 U_1 \setminus \pi_1^2 U_2] \bigcap U_2[\pi_1^2 U_2 \setminus \pi_1^2 U_1] = \varnothing$, яка виконується за припущенням, випливає шукана рівність $(U_1 \bigcup U_2)[X] \bigcap (U_1 \bigcup U_2)[Y] = \varnothing$.

Зважаючи на довільність множин X, Y, залишається застосувати критерій ін'єктивності відношень – формулу (4′) з твердження 1′. ▫□

Як було зазначено в доведенні останнього твердження, рівність $U_1[\pi_1^2 U_1 \setminus \pi_1^2 U_2] \bigcap U_2[\pi_1^2 U_2 \setminus \pi_1^2 U_1] = \varnothing$ є необхідною умовою ін'єктивності об'єднання ін'єктивних відношень. Але, як показує наступний простий приклад, зазначена рівність не є в загальному випадку достатньою умовою (тобто, зважаючи на твердження 3, ця рівність є достатньою умовою тільки за умови сумісності ін'єктивних відношень, що об'єднуються).

Розглянемо два відношення $U \overset{def}{=} \{< x_1, y_1 >, < x_2, y_2 >\}$ та $V \overset{def}{=} \{< x_1, y_2 >, < x_2, y_1 >\}$, де елементи x_1, y_1, x_2, y_2 попарно різні (див. рис. 2, на якому жирні стрілки відповідають відношенню V).

Очевидно, що самі відношення ін'єктивні, а їх об'єднання – ні. Оскільки ці відношення мають однакові проекції за першою компонентою і повний образ зберігає порожню множину, то рівність $U[\pi_1^2 U \setminus \pi_1^2 V] \bigcap V[\pi_1^2 V \setminus \pi_1^2 U] = \varnothing$ тривіально виконується. Причина неін'єктивності об'єднання $U \bigcup V$ полягає в тому, що ці відношення несумісні.

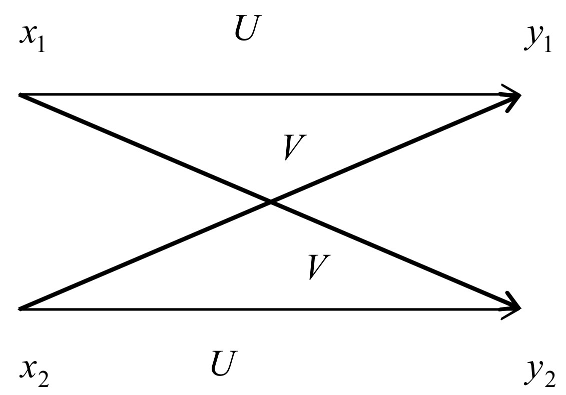

Рис. 4.2. Приклад несумісних ін’єктивних відношень, таких, що виконується рівність $U\ [\pi_1^2 U\ \setminus \pi_1^2 V] \bigcap V[\pi_1^2 V \setminus \pi_1^2 U\ ] = \varnothing$, але їх об’єднання не є ін’єктивним

З доведеного критерію (твердження 3) безпосередньо випливає наслідок для функцій.

Наслідок 4.1 (критерій ін’єктивності об’єднання ін’єктивних сумісних функцій). Нехай f_1, f_2 ін’єктивні сумісні функції (тобто $f_1 \approx f_2$). Тоді виконується еквівалентність

функція $f_1 \bigcup f_2$ ін’єктивна $\Leftrightarrow$ $f_1[domf_1 \setminus domf_2] \bigcap f_2[domf_2 \setminus domf_1] = \varnothing$. □

Саме цей критерій (для випадку функцій) був наведений в [50, підрозділ 1.3, твердження 1.3.3, п. 1]; зауважимо, що в [50] сумісність функцій була потрібна для забезпечення функціональності об’єднання (ін’єктивних) функцій.

Отже, можна зробити висновок, що твердження 3 є узагальненням для відношень п. 1 твердження 1.3.3 з [50, підрозділ 1.3, с. 25]; причому твердження 3 із прикладом, що наведений після його доведення, висвітлює роль відношення сумісності відношень.

Наведемо ще один критерій ін’єктивності відношень.

Твердження 4.4 (критерії ін’єктивності відношень). Наступні твердження еквівалентні:

1) U – ін’єктивне відношення, (4.10)

2) $\forall x \forall X (x \notin X \Rightarrow U[x] \bigcap U[X] = \varnothing)$, (4.11)

3) $\forall x \forall X (x \in \pi_1^2 U \Rightarrow (x \notin X \Leftrightarrow U[x] \bigcap U[X] = \varnothing))$. □ (4.12)

Доведення. Встановимо ланцюжок імплікацій $(10) \Rightarrow (11) \Rightarrow (12) \Rightarrow (10)$. Імплікацію $(10) \Rightarrow (11)$ можна встановити безпосередньо від супротивного, але простіше скористатися формулою (2) твердження 1: дійсно, треба тільки використати тривіальну еквівалентність $x \notin X \Leftrightarrow \{x\} \cap X = \varnothing$. ▫

Встановимо імплікацію $(11) \Rightarrow (12)$: нехай виконується формула (11), розглянемо довільну множину X, довільний елемент x з проекції $\pi_1^2 U$ та встановимо еквівалентність $x \notin X \Leftrightarrow U[x] \cap U[X] = \varnothing$.

Імплікація $x \notin X \Rightarrow U[x] \cap U[X] = \varnothing$ випливає з істинності (11), встановимо від супротивного обернену імплікацію $U[x] \cap U[X] = \varnothing \Rightarrow x \notin X$. Дійсно, нехай $U[x] \cap U[X] = \varnothing$, але $x \in X$. Оскільки $x \in \pi_1^2 U$, то існує елемент y, такий. що $< x, y > \in U$. Очевидно, що $y \in U[x] \cap U[X]$, що суперечить порожності цієї множини. ▫

Нарешті, імплікацію $(12) \Rightarrow (10)$ перевіримо від супротивного: нехай виконується формула (12), але відношення U не є ін'єктивним, тобто існують елементи x, z, y, такі, що $x \neq z$ і $< x, y >, < z, y > \in U$. Тоді очевидно, що $x \in \pi_1^2 U$, $x \notin \{z\}$ та $U[x] \cap U[\{z\}] \neq \varnothing$; а це суперечить формулі (12). ▫□

Застосуємо доведений критерій до функцій та безпосередньо отримуємо наступний наслідок (в обох частинах еквівалентності з формули (12) треба перейти до заперечень).

Наслідок 4.2 (критерій ін'єктивності функцій). Наступні твердження еквівалентні:

1) f – ін'єктивна функція,

2) $\forall x \forall X (x \in dom f \Rightarrow (x \in X \Leftrightarrow f(x) \in f[X]))$. □ (4.13)

Зауважимо, що наведені критерії ін'єктивності відношень та функцій можна дещо спростити, вилучаючи в еквівалентностях загальнозначні імплікації; на цьому шляху еквівалентності формул (12), (13) переходять, відповідно, в імплікації наведених нижче формул (12′), (13′).

$$\forall x \forall X (x \in \pi_1^2 U \Rightarrow (U[x] \cap U[X] \neq \varnothing \Rightarrow x \in X)), \qquad (4.12')$$

$$\forall x \forall X (x \in domf \Rightarrow (f(x) \in f[X] \Rightarrow x \in X)). \qquad (4.13')$$

Наведемо ще один критерій ін'єктивності відношень.

Твердження 4.5 (критерії ін'єктивності відношень в термінах обмежень). Наступні твердження є еквівалентними:

1) U – ін'єктивне відношення, (4.14)

2) $\forall Z (U \mid Z - \text{ін'єктивне відношення})$, (4.15)

3) $\forall Z (Z - \text{скінченна множина} \Rightarrow U \mid Z - \text{ін'єктивне відношення})$ (4.16). □

Доведення. Встановимо ланцюжок імплікацій $(14) \Rightarrow (15) \Rightarrow (16) \Rightarrow (14)$ та почнемо з першої. Нехай відношення U ін'єктивне, Z – довільна множина; покажемо, що обмеження $U \mid Z$ також ін'єктивне. Для цього скористаємось формулою (2) з твердження 1 (критерій ін'єктивності відношень). Отже нехай X, Y довільні множини, що не перетинаються; треба показати, що повні образи $(U \mid Z)[X]$ та $(U \mid Z)[Y]$ також не перетинаються.

Застосовуючи рівність $(U \mid Z_1)[Z_2] = U[Z_1 \cap Z_2]$ (твердження 2.11 про властивості обмеження, п. 10) маємо рівності $(U \mid Z)[X] = U[Z \cap X]$ та $(U \mid Z)[Y] = U[Z \cap Y]$; залишається врахувати, по-перше, ін'єктивність відношення U, по-друге, той факт, що множини $Z \cap X$ і $Z \cap Y$ не перетинаються, та, по-третє, знову застосувати формулу (2). ▫

Імплікація $(15) \Rightarrow (16)$ є тривіальною, тому залишається перевірити імплікацію $(16) \Rightarrow (14)$; зробимо це від супротивного: нехай виконується формула (16), але відношення U не є ін'єктивним, тобто існують елементи x, z, y, такі, що $x \neq z$ та $<x, y>, <z, y> \in U$. Звідси випливає, що обмеження $U \mid \{x, z\}$ не є ін'єктивним всупереч припущенню (16). ▫□

4.2. Узагальнене з'єднання та узагальнений прямий добуток

4.2.1. Властивості відношення сумісності

Будемо розглядати сім'ю відношень (зокрема функцій), частково впорядковану за включенням; верхній (нижній) конус множини відношень Γ

позначимо через Γ^{Δ} (відповідно Γ^{∇}); для скорочення запису конуси одноелементних множин (сінглтонів) $\{f\}^{\Delta}$ та $\{f\}^{\nabla}$ позначимо відповідно як f^{Δ} та f^{∇}.

Лема 4.3 (властивості відношення сумісності). Виконуються імплікації

1) $f \approx g \Rightarrow \forall f' \, \forall g' (f' \in f^{\nabla} \,\&\, g' \in g^{\nabla} \Rightarrow f' \approx g')$; зокрема,

$\forall f' \, \forall f'' (f', f'' \in f^{\nabla} \Rightarrow f' \approx f'')$;

2) $\neg(f \approx g) \Rightarrow \forall f' \, \forall g' (f' \in f^{\Delta} \,\&\, g' \in g^{\Delta} \Rightarrow \neg(f' \approx g'))$;

3) $U_1 \approx V \,\&\, U_2 \approx V \Rightarrow U_1 \cup U_2 \approx V$;

4) $\neg(U_1 \cup U_2 \approx V) \Rightarrow \neg(U_1 \approx V) \vee \neg(U_2 \approx V)$. □

Доведення. Почнемо з першого пункту та доведемо першу імплікацію. Нехай функції f, g сумісні, тобто $f \mid X = g \mid X$, де $X \overset{def}{=} domf \bigcap domg$, а f', g' такі довільні функції, що $f' \subseteq f$ та $g' \subseteq g$; треба довести, що $f' \approx g'$, тобто $f' \mid X' = g' \mid X'$, де $X' \overset{def}{=} domf' \bigcap domg'$.

Оскільки проекція є монотонною, то $domf' \subseteq domf$ та $domg' \subseteq domg$; звідси (та монотонності перетину) випливає включення $X' \subseteq X$. Застосуємо до обох частин рівності $f \mid X = g \mid X$, яка виконується за припущенням, обмеження за множиною X'; враховуючи рівність щодо композиції обмежень (твердження 2.11, п. 5), приходимо до рівності $f \mid (X \bigcap X') = g \mid (X \bigcap X')$, тобто $f \mid X' = g \mid X'$ (використали включення $X' \subseteq X$).

Оскільки згідно з п. 10 твердження 2.11 $f' \mid X' = f \mid X'$ та $g' \mid X' = g \mid X'$, то з встановленої рівності $f \mid X' = g \mid X'$ випливає шукана рівність $f' \mid X' = g' \mid X'$.

Друге твердження першого пункту випливає з доведеного першого твердження: дійсно, треба першу імплікацію застосувати до сумісності $f \approx f$, яка завжди виконується з огляду на рефлексивність відношення сумісності. ▫

Другий пункт випливає з першого та загальних властивостей конусів. Встановимо цей пункт від супротивного: нехай функції f, g є несумісними (тобто $\neg(f \approx g)$), але знайшлися функції f', g', такі, що $f \subseteq f'$, $g \subseteq g'$ та $f' \approx g'$. Але тоді з першого пункту випливає, що $f \approx g$; прийшли до суперечності (зауважимо, що насправді тут використовується загальна властивість конусів – $f \in f^{\Delta\nabla}$, яка, в свою чергу, є частковим випадком загальнозначного включення $A \subseteq A^{\Delta\nabla} \cap A^{\nabla\Delta}$; див., наприклад, [52, § 1, теорема 2, п. (ii), с. 11]). ▫

Встановимо третій пункт. Покладемо $X_1 \overset{def}{=} \pi_1^2 U_1$, $X_2 \overset{def}{=} \pi_1^2 U_2$ та $Y \overset{def}{=} \pi_1^2 V$. З припущень випливає, що $U_1 | (X_1 \cap Y) = V | (X_1 \cap Y)$ та $U_2 | (X_2 \cap Y) = V | (X_2 \cap Y)$.

Оскільки $\pi_1^2(U_1 \cup U_2) \cap \pi_1^2 V = (\pi_1^2 U_1 \cup \pi_1^2 U_2) \cap \pi_1^2 V = (X_1 \cup X_2) \cap Y$ (скористались дистрибутивністю проекції відносно об’єднань), то треба довести рівність $(U_1 \cup U_2) | ((X_1 \cup X_2) \cap Y) = V | ((X_1 \cup X_2) \cap Y)$. Згідно з стандартними теоретико-множинними співвідношеннями (та стандартним пріоритетом операцій), використовуючи дистрибутивність обмеження відносно об’єднань (твердження 2.11, п. 8), маємо ланцюжок рівностей

$$(U_1 \cup U_2) | (X_1 \cup X_2) \cap Y = (U_1 \cup U_2) | (X_1 \cap Y \cup X_2 \cap Y) =$$

$$= (U_1 \cup U_2) | X_1 \cap Y \cup (U_1 \cup U_2) | X_2 \cap Y =$$

$$= (U_1 | X_1 \cap Y) \cup (U_1 | X_2 \cap Y) \cup (U_2 | X_1 \cap Y) \cup (U_2 | X_2 \cap Y) =$$

$$= (U_1 | X_1 \cap Y) \cup (U_2 | X_2 \cap Y) =$$

$$= (V | X_1 \cap Y) \cup (V | X_2 \cap Y) = V | (X_1 \cap Y \cup X_2 \cap Y) = V | ((X_1 \cup X_2) \cap Y).$$

У вищенаведених рівностях скористалися такими включеннями, які випливають з пп. 4, 1 твердження 2.11 (про властивості обмеження):

$$U_1 | (X_2 \cap Y) = U_1 | (\pi_1^2 U_1 \cap X_2 \cap Y) = U_1 | (X_1 \cap X_2 \cap Y) \subseteq U_1 | (X_1 \cap Y),$$

$$U_2 | (X_1 \cap Y) = U_2 | (\pi_1^2 U_2 \cap X_1 \cap Y) = U_2 | (X_2 \cap X_1 \cap Y) \subseteq U_2 | (X_2 \cap Y). \text{ ▫}$$

Останній пункт безпосередньо випливає з попереднього (більш того, останні пункти еквівалентні згідно з загальнозначною еквівалентністю $\varphi \Rightarrow \psi \Leftrightarrow \neg\psi \Rightarrow \neg\varphi$). ▫

Прості приклади показують, що пп. 1, 2 доведеної леми не виконуються, взагалі кажучи, для відношень, тобто функціональність тут суттєва (так само як функціональність відношень була суттєва для п. 10 твердження 2.11, який безпосередньо використовувався при доведенні п. 1 останньої леми 3).

П. 3 доведеної леми можна інтерпретувати як „обмежену" стабільність відношення сумісності відносно операції об'єднання відношень (поняття стабільності використовується стандартно, див., наприклад, [39, гл. 1, § 2, п. 2.4, с. 61]). Що ж до питання про стабільність в загальному випадку, то прості приклади дають негативну відповідь. Наведемо відповідний приклад (який дуже близький до прикладу, наведеного після доведення твердження 3 – одного з критеріїв ін'єктивності відношень).

Розглянемо чотири відношення (навіть функції) $U_1 \overset{def}{=} \{< x_1, y_1 >\}$, $U_2 \overset{def}{=} \{< x_2, y_2 >\}$ та $V_1 \overset{def}{=} \{< x_2, y_1 >\}$, $V_2 \overset{def}{=} \{< x_1, y_2 >\}$, де елементи x_1, y_1, x_2, y_2 попарно різні (див. рис. 3, на якому жирні стрілки відповідають відношенням V_1, V_2).

Очевидно, що $U_1 \approx V_1$ та $U_2 \approx V_2$ (їх проекції за першою компонентою просто не перетинаються), але $\neg(U_1 \cup U_2 \approx V_1 \cup V_2)$. Причина згідно з п. 3 попередньої леми 3 полягає в тому, що відношення V_1, V_2 різні.

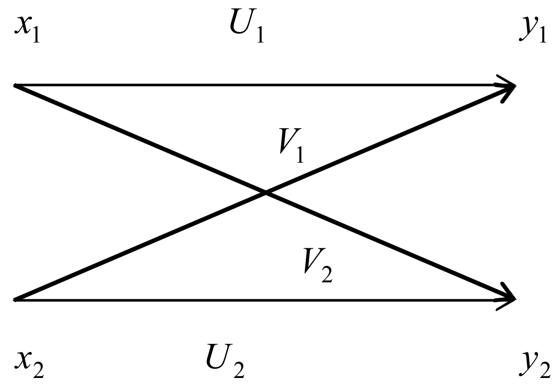

Рис. 4.3. Приклад, що ілюструє нестабільність відношення сумісності відносно операції об’єднання відношень

Оскільки в цьому прикладі всі відношення функціональні (U_1, U_2, V_1, V_2, $U_1 \cup U_2$, $V_1 \cup V_2$), то можна зробити висновок, що відношення сумісності функцій не є, взагалі кажучи, стабільним відносно операції об’єднання сумісних функцій.

Оскільки п. 1 леми 3 для відношень в загальному випадку не виконується, то й імплікація п. 3 для відношень не обертається; але, як випливає з того самого п. 1 леми 3, імплікація обертається для функцій (в цьому випадку для того, щоб залишитися в класі функцій, треба додатково вимагати сумісності функціональних відношень U_1, U_2).

4.2.2. Операція узагальненого з’єднання множин функцій

Множину всіх функцій на універсумі позначимо **F**, як і в підрозділі 3.2; на ній розглянемо таку бінарну операцію

$$\bar{\cup} : \mathbf{F} \times \mathbf{F} \tilde{\to} \mathbf{F},\ dom\bar{\cup} = \{< f, g > | \ f \approx g\},\ f \bar{\cup} g = f \cup g \text{ для всіх } f, g \in dom\bar{\cup}.$$

З огляду на критерій функціональності об’єднання функцій (лема 3.1) операція $\bar{\cup}$ введена коректно (зауважимо, що саме про цю операцію йдеться при аналізі вищенаведеного прикладу в попередньому п. 4.2.1, що демонструє нестабільність відношення сумісності функцій відносно об’єднання). Основні властивості введеної операції наведені в наступній лемі. Поняття комутативності та асоціативності для часткових операцій використовуються як і раніше в підрозділі 2.3, тобто вимагається виконання відповідних узагальнених рівностей.

Лема 4.4 (властивості операції об’єднання сумісних функцій $\bar{\bigcup}$). Операція $\bar{\bigcup}$ комутативна та асоціативна. □

Доведення. Комутативність операції випливає з симетричності відношення сумісності та комутативності теоретико-множинного об’єднання; спираючись на попередню лему 3 про властивості відношення сумісності, встановимо асоціативність. ▫

Отже, треба довести узагальнену рівність $(f_1 \bar{\bigcup} f_2) \bar{\bigcup} f_3 \simeq f_1 \bar{\bigcup} (f_2 \bar{\bigcup} f_3)$; тобто показати, що обидві частини одночасно або невизначені, або визначені і мають рівні значення. Розглянемо два можливих випадки.

Нехай значення лівої частини $(f_1 \bar{\bigcup} f_2) \bar{\bigcup} f_3$ визначене; тоді визначене і значення $f_1 \bar{\bigcup} f_2$, звідси випливає, що $f_1 \approx f_2$ та $f_1 \bar{\bigcup} f_2 = f_1 \bigcup f_2$. Із визначення лівої частини також випливає, що $f_1 \bigcup f_2 \approx f_3$ та $(f_1 \bar{\bigcup} f_2) \bar{\bigcup} f_3 = (f_1 \bigcup f_2) \bigcup f_3 = f_1 \bigcup f_2 \bigcup f_3$.

Із сумісності $f_1 \bigcup f_2 \approx f_3$ та п. 1 леми 3 випливає, що $f_2 \approx f_3$, тобто значення $f_2 \bar{\bigcup} f_3$ визначено, більш точно $f_2 \bar{\bigcup} f_3 = f_2 \bigcup f_3$. Аналогічно маємо сумісність $f_1 \approx f_3$; звідси з врахуванням сумісності $f_1 \approx f_2$ та п. 3 леми 3 випливає, що $f_1 \approx f_2 \bigcup f_3$, тобто значення $f_1 \bar{\bigcup} (f_2 \bigcup f_3)$ визначено і дорівнює об’єднанню всіх трьох функцій $f_1 \bigcup (f_2 \bigcup f_3)$.

Як бачимо, з визначення лівої частини випливає визначення правої частини та збіжність значень частин (узагальненої рівності, що доводиться). ▫

Нехай тепер значення лівої частини $(f_1 \bar{\bigcup} f_2) \bar{\bigcup} f_3$ невизначене; тут два своїх випадки. Нехай спочатку значення $f_1 \bar{\bigcup} f_2$ невизначене, тобто $\neg(f_1 \approx f_2)$.

Якщо значення $f_2 \overline{\cup} f_3$ невизначено, то тим більше невизначено і значення правої частини $f_1 \overline{\cup}(f_2 \overline{\cup} f_3)$; якщо ж навпаки значення $f_2 \overline{\cup} f_3$ визначено, тобто $f_2 \approx f_3$, то значення правої частини $f_1 \overline{\cup}(f_2 \cup f_3)$ знову ж невизначено оскільки $\neg(f_1 \approx f_2 \cup f_3)$ (що випливає з несумісності $\neg(f_1 \approx f_2)$ з застосуванням п. 2 леми 3). ▫

Нарешті, нехай значення лівої частини $(f_1 \overline{\cup} f_2) \overline{\cup} f_3$ невизначене, а значення $f_1 \overline{\cup} f_2$ визначено. Тоді значення $(f_1 \cup f_2) \overline{\cup} f_3$ невизначене, тобто виконується несумісність $\neg(f_1 \cup f_2 \approx f_3)$; звідси, з огляду на п. 4 леми 3, випливає, що $\neg(f_1 \approx f_3)$ або $\neg(f_2 \approx f_3)$.

Якщо $\neg(f_2 \approx f_3)$, то значення $f_2 \overline{\cup} f_3$ невизначено, тому значення правої частини $f_1 \overline{\cup}(f_2 \overline{\cup} f_3)$ тим більше невизначено.

Якщо ж навпаки $f_2 \approx f_3$, то тоді $\neg(f_1 \approx f_3)$; звідки згідно з п. 2 леми 3 випливає несумісність $\neg(f_1 \approx f_2 \cup f_3)$; отже і в цьому останньому випадку значення правої частини $f_1 \overline{\cup}(f_2 \cup f_3)$ невизначено. ▫□

Зауважимо, що твердження доведеної леми 4 про комутативність та асоціативність операції об’єднання сумісних функцій наведені у [50, підрозд. 2.7, лема 2.7.2, с. 51]; при цьому відповідні властивості відношення сумісності, наведені в лемі 3, по суті використовувались неявно.

Розповсюдимо бінарну операцію $\overline{\cup}$ з функцій на множини функцій в термінах повного образу за загальною схемою (див. підрозділ 2.3); на цьому шляху отримаємо таку всюди визначену бінарну операцію, аргументами і значеннями якої є множини функцій:

$[\bar{\bigcup}]: P(\mathbf{F}) \times P(\mathbf{F}) \to P(\mathbf{F})$,

$[\bar{\bigcup}](F_1, F_2) = \bar{\bigcup}[F_1 \times F_2] = \{f_1 \cup f_2 \mid f_1 \in F_1 \,\&\, f_2 \in F_2 \,\&\, f_1 \approx f_2\}$ для всіх множин функцій $F_1, F_2 \subseteq \mathbf{F}$.

Позначимо $\otimes = [\bar{\bigcup}]$; саме так позначалася операція з'єднання в табличних алгебрах [47; 49; 50, підрозд. 2.1, с. 32]. Використовується саме це позначення тому, що на скінченних множинах, які складаються з скінченних функцій з однаковою областю означеності, операція $[\bar{\bigcup}]$ по суті співпадає з операцією з'єднання таблиць (за означенням таблицею є скінченна множина функцій з однаковою областю означеності, яка в цьому випадку називається схемою таблиці).

Для випадку, що розглядається в цьому розділі, операцію $\otimes$ назвемо *узагальненим з'єднанням*.

Твердження 4.6 (властивості узагальненого з'єднання $\otimes$). Операція узагальненого з'єднання $\otimes : P(\mathbf{F}) \times P(\mathbf{F}) \to P(\mathbf{F})$ є комутативною та асоціативною; множина $\{f_\varnothing\}$ є правою та лівою одиницею для операції $\otimes$; операція $\otimes$ зберігає порожню множину[1]. □

Доведення. Комутативність та асоціативність випливають з таких самих властивостей операції $\bar{\bigcup}$, встановлених в лемі 4, та загального факту про успадкування вказаних властивостей при розповсюдженні операцій з елементів на множини елементів (твердження 2.10). ▫

Твердження про одиницю перевіряється безпосередньо; воно випливає з того, що всюди невизначена функція $f_\varnothing$ є правою та лівою одиницею операції $\bar{\bigcup}$ (крім того, суттєво, що $f_\varnothing$ сумісна з довільною функцією). ▫

---

[1] Тобто, якщо хоча б один з аргументів дорівнює порожній множині, то і узагальнене з'єднання порожнє.

Нарешті, збереження порожньої множини узагальненим з'єднанням випливає з збереження порожньої множини декартовим добутком та повним образом (п. 6 твердження 2.2 про властивості повного образу). □

З доведеного твердження випливають аналогічні властивості операції з'єднання табличних алгебр (комутативність, асоціативність, існування та вигляд одиниці, збереження порожньої таблиці, наведені в [50]: відповідно пп. 2, 3, 4, 5 твердження 2.7.1 на с. 52).

4.2.3. Узагальнений прямий добуток

Нехай $i \mapsto D_i$, де $i \in I$, – деяке індексування з множиною індексів I. Узагальнений прямий добуток, що відповідає цьому індексуванню, позначимо через $\prod_{i \in I} D_i$. Згідно зі стандартним означенням $\prod_{i \in I} D_i \overset{def}{=} \{f \mid f : I \to \bigcup_{i \in I} D_i \ \& \ \forall i (i \in I \Rightarrow f(i) \in D_i)\}$ (див., наприклад [36, вступ, § 3, п. VIII, с. 30].)

Покладемо за означенням, що узагальнений прямий добуток, який відповідає всюди невизначеному індексуванню (іншими словами порожній множині індексів) містить єдиний елемент – всюди невизначену функцію: $\prod_{i \in \varnothing} D_i \overset{def}{=} \{f_{\varnothing}\}$. Така домовленість відповідає означенню та дуже зручна з технічної точки зору, що буде продемонстровано далі.

Твердження 4.7 (розклад прямого добутку). Для довільного покриття $\{I_1, I_2\}$ індексної множини I виконується рівність $\prod_{i \in I} D_i = \prod_{i \in I_1} D_i \otimes \prod_{i \in I_2} D_i$ за умови, що індексування в правій частині рівності отримуються обмеженням індексування лівої частини на свої множини індексів. □

Доведення. Покажемо спочатку, що права частина рівності включається в ліву. Отже, нехай $f \in \prod_{i \in I_1} D_i \otimes \prod_{i \in I_2} D_i$, тоді існують такі сумісні функції f_1, f_2, що $f_1 \in \prod_{i \in I_1} D_i$, $f_2 \in \prod_{i \in I_2} D_i$ та $f = f_1 \cup f_2$. Оскільки $\{I_1, I_2\}$ покриття та проекція дистрибутивна відносно об'єднання, маємо рівності $domf = dom(f_1 \cup f_2) = domf_1 \cup domf_2 = I_1 \cup I_2 = I$. Належності $f(i) \in D_i$ для всіх $i \in I$ очевидні (вони випливають з аналогічних належностей для функцій f_1, f_2). Таким чином, функція f належить лівій частині. ▫

Залишається показати, що ліва частини рівності, що доводиться, включається в праву. Нехай $f \in \prod_{i \in I} D_i$; очевидно, згідно з властивостями обмеження (твердження 2.11, пп. 4, 8), маємо такий розклад $f = f \mid domf = f \mid I = f \mid (I_1 \cup I_2) = f \mid I_1 \cup f \mid I_2$ (тут суттєво, що $\{I_1, I_2\}$ є покриттям, тобто $I = I_1 \cup I_2$). Залишається врахувати сумісність $f \mid I_1 \approx f \mid I_2$ (це випливає з спадності обмеження та п. 1 леми 3) та очевидні належності $f \mid I_1 \in \prod_{i \in I_1} D_i$, $f \mid I_2 \in \prod_{i \in I_2} D_i$. Отже, $f \in \prod_{i \in I_1} D_i \otimes \prod_{i \in I_2} D_i$. ▫□

Зробимо декілька зауважень. По-перше, покриття може містити і порожню множину, в цьому випадку, згідно із домовленістю про прямий добуток для порожнього індексування, один з множників приймає вигляд $\{f_\varnothing\}$, а ця множина є одиницею для з'єднання згідно із твердженням 6.

По-друге, при доведенні останнього твердження по суті була встановлена рівність $\prod_{i \in I_1} D_i = (\uparrow I_1)[\prod_{i \in I} D_i]$ (для множини I_2 повністю аналогічно), яка в наступному твердженні 8 (п. 5) буде узагальнена.

Нижче покладемо за означенням $(X \to Y) \overset{def}{=} \{f \mid f : X \to Y\}$ – множина всіх всюди визначених (тотальних) відповідних функцій.

Наслідок 4.3 (розклад прямого добутку для скінченної індексної множини). Нехай $I = \{i_1, ..., i_n\}$, де $n \geq 1$. Тоді виконується рівність $\prod_{i \in I} D_i = (\{i_1\} \to D_{i_1}) \otimes ... \otimes (\{i_n\} \to D_{i_n})$. □

Доведення проводиться індукцією за n. Базис індукції ($n = 1$) тривіальний. ▫

Індуктивний крок. Припустимо, що рівність виконується для всіх індексних множин, які містять n елементів, та покажемо, що ця ж рівність виконується і для індексних множин, що містять $n+1$ елементів. Отже, нехай $I=\{i_1,...,i_n,i_{n+1}\}$. Сформуємо покриття індексної множини I у вигляді двох множин $I_1 \stackrel{def}{=} \{i_1,...,i_n\}$, $I_2 \stackrel{def}{=} \{i_{n+1}\}$ та застосуємо твердження 7 про розклад прямого добутку, а також індуктивне припущення:

$$\prod_{i\in I} D_i = \prod_{i\in I_1} D_i \otimes \prod_{i\in I_2} D_i = ((\{i_1\}\to D_{i_1})\otimes ...\otimes(\{i_n\}\to D_{i_n}))\otimes(\{i_{n+1}\}\to D_{i_{n+1}}) =$$

$$=(\{i_1\}\to D_{i_1})\otimes ...\otimes(\{i_n\}\to D_{i_n})\otimes(\{i_{n+1}\}\to D_{i_{n+1}}). \ \square$$

Далі через I_j, де $j\in D$, позначимо таку часткову (параметричну) функцію $I_j:\mathbf{F}\xrightarrow{\sim} D$, $I_j(f)\simeq f(j)$. Ця функція є узагальненим селектором.

Твердження 4.8 (властивості узагальненого прямого добутку). Виконуються твердження

1) $\prod_{i\in I} D_i = \varnothing \Leftrightarrow \exists i(i\in I \,\&\, D_i=\varnothing)$ (критерій порожності, збереження порожньої множини, аксіома вибору у випадку нескінченної індексної множини);

2) $U=\bigcup_{x\in\pi_1^2 U}\prod U[x]$, зокрема, для функцій $\{f\}=\prod_{i\in dom f}\{f(i)\}$ (зображення бінарного відношення (функції) через прямий добуток);

3) $I_j[\prod_{i\in I} D_i]=D_j$ для всіх $j\in I$, таких, що виконується $\forall i(i\in I \,\&\, i\neq j \Rightarrow D_i\neq\varnothing)$ (повний образ прямого добутку відносно селектору);

4) $\forall i(i\in I\Rightarrow D_i\subseteq D_i')\Rightarrow \prod_{i\in I} D_i\subseteq\prod_{i\in I} D_i'$ (монотонність прямого добутку); якщо ж накласти додаткову умову непорожності всіх множин D_i для $i\in I$, то ця імплікація обертається – $\forall i(i\in I\Rightarrow D_i\subseteq D_i')\Leftrightarrow \prod_{i\in I} D_i\subseteq\prod_{i\in I} D_i'$;

5) $\forall i(I_2 \setminus I_1 \Rightarrow D_i \neq \varnothing) \Rightarrow \prod_{i \in I_2 \cap I_1} D_i = (\uparrow I_1)[\prod_{i \in I_2} D_i]$ (повний образ прямого добутку відносно обмеження). □

Доведення. П. 1 доводиться очевидним чином. Тільки зауважимо, якщо необхідність доводити від супротивного, то у випадку нескінченної індексної множини треба спиратися на аксіому вибору.

Крім того, твердження пункту виконується і для порожньої індексної множини: дійсно, за означенням ліва частина перетворюється в хибну рівність $\{f_\varnothing\} = \varnothing$, а права частина, очевидно, також хибна; отже, еквівалентність для цього крайнього випадку все ж таки виконується.

Якщо взяти заперечення від обох частин еквівалентності пункту, то твердження прийме вигляд $\prod_{i \in I} D_i \neq \varnothing \Leftrightarrow \forall i(i \in I \Rightarrow D_i \neq \varnothing)$. Прийшли до однієї з форм аксіоми вибору (див., наприклад, [52, § 2, теорема 4, пункт (1), с. 22].)▫

Другий пункт. Цей пункт стверджує, що відношення, як множина пар, отримується об'єднанням всіх функцій, що складають вказаний прямий добуток. Пункт перевіряється безпосередньо з використанням рівності $U = \bigcup_{x \in \pi_1^2 U} \{x\} \times U[x]$, наведеної в лемі 2.2. Зауважимо, що рівність пункту залишається вірною і для порожнього відношення (всюди невизначеної функції $f_\varnothing$) ▫

Третій пункт. Покажемо спочатку, що ліва частина включається в праву. Нехай $x \in I_j[\prod_{i \in I} D_i]$, тоді згідно з означенням повного образу існує функція f, така, що $f \in \prod_{i \in I} D_i$, $I_j(f) = x$; звідси $f(j) = x$. За означенням прямого добутку $f(j) \in D_j$, тобто $x \in D_j$. ▫

Тепер покажемо, що права частина включається в ліву. Нехай спочатку $D_j = \varnothing$; оскільки прямий добуток зберігає порожню множину (доведений п. 1) і так само для повного образу (п. 6 твердження 2.2 про властивості повного образу), то ліва частина також порожня.

Нехай тепер множина D_j не порожня, розглянемо довільний елемент $x \in D_j$. В кожній непорожній за припущенням множині D_i, $i \in I$, $i \neq j$, обираємо по елементу x_i (якщо треба, то, звісно, застосовуємо аксіому вибору) і формуємо функцію f, таку, що $f(j) = x$, $f(i) = x_i$ для всіх $i \in I$, таких, що $i \neq j$. Очевидно, що $f \in \prod_{i \in I} D_i$, $I_j(f) = x$, тобто елемент x належить лівій частині. ▫

Четвертий пункт. Імплікація пункту випливає безпосередньо з означення прямого добутку.

Покажемо, що за умови непорожності всіх множин D_i, де $i \in I$, ця імплікація обертається. Отже, нехай $\prod_{i \in I} D_i \subseteq \prod_{i \in I} D'_i$. Очевидно, що всі множини D'_i, де $i \in I$, також непорожні. Дійсно, згідно з п. 1 прямий добуток $\prod_{i \in I} D_i$ непорожній, тоді згідно з включенням прямий добуток $\prod_{i \in I} D'_i$ також непорожній, а звідси всі множини D'_i, де $i \in I$, непорожні (знову згідно з п. 1).

Зафіксуємо довільне $i \in I$, та візьмемо повній образ відносно селектора I_i від обох частин нашого включення $\prod_{i \in I} D_i \subseteq \prod_{i \in I} D'_i$. Оскільки повний образ монотонний (твердження 2.2, п. 1), то включення збережеться – $I_i[\prod_{i \in I} D_i] \subseteq I_i[\prod_{i \in I} D'_i]$. Залишається застосувати попередній п. 3 і отримати включення $D_i \subseteq D'_i$. ▫

Зауважимо, що в загальному випадку імплікація пункту не обертається; зрозуміло, що це пов'язано з збереженням порожньої множини прямим добутком. ▫

П'ятий пункт. Нехай всі множини D_i для $i \in I_2 \setminus I_1$ непорожні, доведемо рівність $\prod_{i \in I_2 \bigcap I_1} D_i = (\uparrow I_1)[\prod_{i \in I_2} D_i]$; спочатку покажемо, що ліва частина включається в праву.

Нехай $f \in \prod_{i \in I_2 \bigcap I_1} D_i$, у всіх непорожній множинах D_i для $i \in I_2 \setminus I_1$ обираємо по елементу x_i і формуємо функцію $f'' \overset{def}{=} f \bigcup f'$, де $f' \overset{def}{=} \bigcup_{i \in I_2 \setminus I_1} \{< i, x_i >\}$. Очевидно, що $f'' \in \prod_{i \in I_2} D_i$; тому, якщо покажемо рівність $f = f'' | I_1$, то цього буде досить для доведення включення. Дійсно, маємо ланцюжок рівностей:

$f'' | I_1 = (f \bigcup f') | I_1 = f | I_1 \bigcup f' | I_1 = f | (domf \bigcap I_1) \bigcup f' | (domf' \bigcap I_1) =$

$= f | (I_1 \bigcap I_2 \bigcap I_1) \bigcup f' | (I_2 \setminus I_1 \bigcap I_1) = f | (I_1 \bigcap I_2) \bigcup f' | \varnothing = f | domf \bigcup f_{\varnothing} = f$.

Тут, як і раніше, скористалися відповідними властивостями обмеження (твердження 2.11).▫

Нарешті покажемо, що права частина включається в ліву. Нехай $f \in (\uparrow I_1)[\prod_{i \in I_2} D_i]$, тоді існує функція f', така, що $f' | I_1 = f$ та $f' \in \prod_{i \in I_2} D_i$. Очевидно, що функція f' має такий розклад $f' = f'' \bigcup f'''$, де $f'' \overset{def}{=} f' | (I_1 \bigcap I_2)$ та $f''' \overset{def}{=} f' | (I_2 \setminus I_1)$; також очевидно, що $f'' \in \prod_{i \in I_1 \bigcap I_2} D_i$ та $f''' \in \prod_{i \in I_2 \setminus I_1} D_i$.

Тепер маємо ланцюжок рівностей:

$f = f' | I_1 = (f'' \bigcup f''') | I_1 = f'' | I_1 \bigcup f''' | I_1 = f'' | (domf'' \bigcap I_1) \bigcup f''' | (domf''' \bigcap I_1) =$

$= f'' | (I_1 \bigcap I_2 \bigcap I_1) \bigcup f''' | (I_2 \setminus I_1 \bigcap I_1) = f'' | (I_1 \bigcap I_2) \bigcup f''' | \varnothing = f'' | domf'' = f''$.

Обґрунтування переходів спираються на відповідні властивості обмеження. Отже, $f = f'' \in \prod_{i \in I_1 \bigcap I_2} D_i$, що і треба було довести. ▫□

Прокоментуємо останній п. 5. Прості приклади показують, що в загальному випадку рівність $\prod_{i \in I_2 \cap I_1} D_i = (\uparrow I_1)[\prod_{i \in I_2} D_i]$ не виконується, але завжди виконується включення $(\uparrow I_1)[\prod_{i \in I_2} D_i] \subseteq \prod_{i \in I_2 \cap I_1} D_i$; таким чином, непорожність всіх множин D_i для $i \in I_2 \setminus I_1$ потрібна саме для виконання оберненого включення. Що ж до перетину індексних множин I_1 та I_2, то він може бути і порожнім, в цьому випадку рівність пункту виконується та приймає вигляд $\{f_\varnothing\} = \{f_\varnothing\}$.

Основні результати розділу 4 наступні.

1. Наведені критерії: ін'єктивності відношень, ін'єктивності функцій, ін'єктивності відношень в термінах обмежень, ін'єктивності об'єднання ін'єктивних відношень, ін'єктивності об'єднання ін'єктивних сумісних відношень, ін'єктивності об'єднання ін'єктивних сумісних функцій.

2. Встановлено комутативність та асоціативність операції об'єднання сумісних функцій $\bar{\bigcup}$.

3. Наведені властивості узагальненого з'єднання $\otimes$: комутативність, асоціативність, збереження порожньої множини, існування правої та лівої одиниці.

4. Встановлені розклади узагальненого прямого добутку, зокрема, для скінченної індексної множини.

5. Наведено властивості узагальненого прямого добутку: зображення бінарного відношення (функції) через прямий добуток, повний образ прямого добутку відносно селектору, повний образ прямого добутку відносно обмеження, критерій порожності, збереження порожньої множини, монотонність.

Основні результати та їх інтерпретація наведені в таблиці 1.

Таблиця 1 – Основні результати розділу 4

№ п.п.	Твердження	Стисле формулювання	Інтерпретація
(1)	(2)	(3)	(4)
1.	Твердження 4.1.	Твердження: а) $\forall XY(X \cap Y = \varnothing \Rightarrow \Rightarrow U[X] \cap U[Y] = \varnothing)$; б) $\forall xy(x \neq y \Rightarrow \Rightarrow U[x] \cap U[y] = \varnothing)$; в) $\forall XY(X, Y \subseteq \pi_1^2 U \Rightarrow \Rightarrow (U[X] \cap U[Y] = \varnothing \Leftrightarrow \Leftrightarrow X \cap Y = \varnothing))$; г) $\forall xy(x, y \in \pi_1^2 U \Rightarrow (U[x] \cap \cap U[y] = \varnothing \Leftrightarrow x \neq y)$ еквівалентні ін'єктивності відношення U.	Критерії ін'єктивності відношень.
2.	Твердження 4.1′.	Кожне з двох тверджень а) $\forall XY(X, Y \subseteq \pi_1^2 U \Rightarrow \Rightarrow (X \cap Y = \varnothing \Rightarrow \Rightarrow U[X] \cap U[Y] = \varnothing))$; б) $\forall xy(x, y \in \pi_1^2 U \Rightarrow \Rightarrow (x \neq y \Rightarrow \Rightarrow U[x] \cap U[y] = \varnothing))$ еквівалентне ін'єктивності відношення U.	Критерії ін'єктивності відношень, отримані з тверженя 4.1, застосуванням загальнозначної імплікації з леми 4.1.

(1)	(2)	(3)	(4)
3.	Твердження 4.2.	$U_1 \bigcup U_2$ ін'єктивне $\Leftrightarrow$ $U_1^{-1} \approx U_2^{-1}$ за умови ін'єктивності відношень U_1, U_2.	Критерій ін'єктивності об'єднання ін'єктивних відношень.
4.	Твердження 4.3.	$U_1 \bigcup U_2$ ін'єктивне $\Leftrightarrow$ $U_1[\pi_1^2 U_1 \setminus \pi_1^2 U_2] \bigcap$ $\bigcap U_2[\pi_1^2 U_2 \setminus \pi_1^2 U_1] = \varnothing$ за умови ін'єктивності та сумісності відношень U_1, U_2.	Критерій ін'єктивності об'єднання ін'єктивних сумісних відношень.
5.	Наслідок 4.1.	Функція $f_1 \bigcup f_2$ ін'єктивна $\Leftrightarrow$ $f_1[domf_1 \setminus domf_2] \bigcap$ $\bigcap f_2[domf_2 \setminus domf_1] = \varnothing$ за умови сумісності ін'єктивних функцій f_1, f_2.	Критерій ін'єктивності об'єднання ін'єктивних сумісних функцій.
6.	Твердження 4.4.	Кожне з двох тверджень: а) $\forall x \forall X (x \notin X \Rightarrow$ $\Rightarrow U[x] \bigcap U[X] = \varnothing)$; б) $\forall x \forall X (x \in \pi_1^2 U \Rightarrow$ $\Rightarrow (x \notin X \Leftrightarrow U[x] \bigcap$ $\bigcap U[X] = \varnothing))$; еквівалентне ін'єктивності відношення U.	Критерії ін'єктивності відношень.

(1)	(2)	(3)	(4)
7.	Наслідок 4.2.	Твердження: $\forall x \forall X(x \in domf \Rightarrow$ $\Rightarrow (x \in X \Leftrightarrow f(x) \in f[X]))$ еквівалентне ін’єктивності функції f.	Критерій ін’єктивності функцій.
8.	Твердження 4.5.	Два твердження а) $\forall Z(U \mid Z -$ ін’єктивне відношення); б) $\forall Z(Z -$ скінченна множина $\Rightarrow U \mid Z -$ ін’єктивне відношення) еквівалентні ін’єктивності відношення U.	Критерії ін’єктивності відношення в термінах обмежень.
9.	Лема 4.4.	Операція об’єднання сумісних функцій $\bar{\bigcup}$ комутативна та асоціативна.	Властивості комутативності та асоціативності операції $\bar{\bigcup}$.
10.	Твердження 4.6.	Операція узагальненого з’єднання $\otimes$ комутативна та асоціативна; множина $\{f_{\varnothing}\}$ є правою (лівою) одиницею для операції $\otimes$, яка зберігає порожню множину.	Властивості операції узагальненого з’єднання $\otimes$.

(1)	(2)	(3)	(4)
11.	Твердження 4.7.	$\prod_{i\in I} D_i = \prod_{i\in I_1} D_i \otimes \prod_{i\in I_2} D_i$, де $\{I_1, I_2\}$ довільне покриття індексної множини I, а індексування $i \to D_i, i \in I_1$; $i \to D_i, i \in I_2$ отримується обмеженням індексування $i \to D_i, i \in I$ на множини індексів I_1, I_2 відповідно.	Розклад узагальненого прямого добутку в термінах операції з'єднання $\otimes$.
12.	Наслідок 4.3.	$\prod_{i\in I} D_i = \underset{k=1}{\overset{n}{\otimes}} \{i_k \to D_{i_k}\}$, де $I = \{i_1, ..., i_n\}, \quad n \geq 1$.	Розклад узагальненого прямого добутку для скінченної індексної множини.
13.	Твердження 4.8, п. 1.	$\prod_{i\in I} D_i = \varnothing \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \exists i(i \in I \,\&\, D_i = \varnothing)$.	Критерій порожності узагальненого прямого добутку, збереження ним порожньої множини, аксіома вибору для випадку нескінченної індексної множини.
14.	Твердження 4.8, п. 2.	$U = \bigcup_{x \in \pi_1^2 U} \prod U[x]$, $\{f\} = \prod_{i \in domf} \{f(i)\}$	Зображення бінарного відношення (функції) через прямий добуток.

(1)	(2)	(3)	(4)
15.	Твердження 4.8, п. 3.	$I_j[\prod_{i\in I} D_i] = D_j$ для всіх $j \in I$, причому $\forall i(i \in I \,\&\, i \neq j \Rightarrow D_i \neq \varnothing)$.	Повний образ прямого добутку відносно узагальненого селектору.
16.	Твердження 4.8, п. 4, перше твердження.	$\prod_{i\in I} D_i \subseteq \prod_{i\in I} D'_i$ за умови $\forall i(i \in I \Rightarrow D_i \subseteq D'_i)$.	Монотонність прямого добутку.
17.	Твердження 4.8, п. 4, друге твердження.	$\prod_{i\in I} D_i \subseteq \prod_{i\in I} D'_i \Leftrightarrow$ $\forall i(i \in I \Rightarrow D_i \subseteq D'_i)$ за умови непорожності всіх множин D_i для $i \in I$.	Достатня умова зворотності імплікації монотонності прямого добутку.
18.	Твердження 4.8, п. 5.	$\prod_{i\in I_2 \cap I_1} D_i = (\uparrow I_1)[\prod_{i\in I_2} D_i]$ за умови $\forall i(I_2 \setminus I_1 \Rightarrow D_i \neq \varnothing)$.	Повний образ прямого добутку відносно обмеження.

РОЗДІЛ 5. ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕТИКО-МНОЖИННИХ РЕЗУЛЬТАТІВ У ТЕОРІЇ ТАБЛИЧНИХ АЛГЕБР

У цьому розділі продовжується демонстрація застосування отриманих в попередніх розділах 2-4 теоретико-множиних результатів до табличної алгебри.

В наступних твердженнях наведені властивості операцій табличної алгебри, при доведенні яких явно використовуються властивості відповідних теоретико-множинних конструкцій.

5.1. Властивості проекції, з’єднання, насичення та перейменування

Твердження 5.1 (монотонність проекції, з’єднання, насичення, перейменування; дистрибутивність проекції, з’єднання, перейменування). Операції проекції, з’єднання, перейменування, насичення монотонні за теоретико-множинним включенням:

1) $t_1 \subseteq t_2 \Rightarrow \pi_X(t_1) \subseteq \pi_X(t_2)$ (монотонність проекції);

2) $t_1 \subseteq t_1' \,\&\, t_2 \subseteq t_2' \Rightarrow t_1 \otimes t_2 \subseteq t_1' \otimes t_2'$ (монотонність з’єднання за сукупністю аргументів);

3) $t_1 \subseteq t_2 \Leftrightarrow Rt_\xi(t_1) \subseteq Rt_\xi(t_2)$, де t_1, t_2 мають однакову ξ-допустиму схему (монотонність перейменування).

4) $t_1 \subseteq t_2 \Rightarrow D_{A,t_1} \subseteq D_{A,t_2}$ (монотонність активного домену); $t_1 \subseteq t_2 \Rightarrow C(t_1) \subseteq C(t_2)$ (монотонність насичення);

Операції проекції, з’єднання, перейменування дистрибутивні відносно теоретико-множинного об’єднання:

5) $\pi_X(\bigcup_i t_i) = \bigcup_i \pi_X(t_i)$ (дистрибутивність проекції відносно об’єднань);

6) $t \otimes (\bigcup_i t_i) = \bigcup_i t \otimes t_i$ (дистрибутивність з’єднання відносно об’єднань за другим аргументом) в припущенні, що схеми таблиць t_i збігаються (для першого аргументу аналогічно);

7) $Rt_\xi(\bigcup_i t_i) = \bigcup_{\eta[R]} Rt_\xi(t_i)$, де таблиці t_i мають однакову ξ-допустиму схему R (дистрибутивність перейменування відносно об’єднань). □

Доведення. Використовуючи зображення відповідних операцій (твердження 1.1), монотонність повного образу відносно об'єднання (твердження 2.2, п. 1) та узагальненого прямого добутку (твердження 4.8, п. 4, ця властивість застосовується для доведення монотонності насичення) доводяться пп. 1-3; при доведені дистрибутивності операцій пп. 5-7 треба використати зображення операцій та дистрибутивність повного образу відносно об'єднань (твердження 2.2, п. 2). ▫ □

Встановимо монотонність активного домену та насичення. З зображення насичення (через активний домен та узагальнений прямий добуток, див. твердження 1.1, п. 3) та монотонності узагальненого прямого добутку (твердження 4.8, п. 4) слідує, що з монотонності активного домену випливає монотонність насичення; тому перевіримо монотонність активного домену.

Для цього скористаємось очевидним зображенням активного домена

$$D_{A,t} = I_A[t], \qquad (5.1)$$

де $I_A : S \tilde{\to} D$, $I_A(s) \simeq s(A)$ для $s \in S$.

Змістовно кажучи, часткова операція I_A рядку s співставляє значення атрибута A в ньому. Очевидно, що

$$dom\, I_A = \bigcup_{R:A\in R} S(R). \qquad (5.2)$$

Операція I_A по суті є (узагальненим) селектором (аналогом функції I_j, що розглядалась в попередньому розділі).

З зображення (5.1) та монотонності повного образу (твердження 2.2, п. 1) і випливає монотонність активного домену відносно теоретико-множинного включення. ▫□

Подамо ще деякі властивості даних операцій. Нижче поняття (первинного, primary key) ключа таблиці розуміється стандартно (див. наприклад [50, підрозд. 2.4, с. 43; 19; 24; 33; 43]).

Твердження 5.2 (властивості проекції). Нехай R – схема таблиць t, t_i. Виконуються наступні співвідношення:

1) $\pi_X(t) \in T(R \cap X)$; причому довільна таблиця схеми $R \cap X$ дорівнює проекції за X деякої таблиці схеми R (тобто відображення $\pi_X : T(R) \to T(R \cap X)$ є сюр'єктивним);

2) $R \subseteq X \Rightarrow \pi_X(t) = t$, причому для непорожніх таблиць ця імплікація обертається: $t \neq t_\varnothing \Rightarrow (R \subseteq X \Leftrightarrow \pi_X(t) = t)$; зокрема, $\pi_R(t) = t$;

3) $\pi_X(t) = t_\varnothing \Leftrightarrow t = t_\varnothing$ (критерій порожності проекції; зокрема, збереження порожньої таблиці $t_\varnothing$);

4) $\pi_X(t) = t_\varepsilon \Leftrightarrow t \neq t_\varnothing \,\&\, X \cap R = \varnothing$; зокрема, $\pi_X(t_\varepsilon) = t_\varepsilon$ (збереження спеціальної таблиці t_ε);

5) $\pi_X(\bigcap_i t_i) \subseteq \bigcap_i \pi_X(t_i)$ (верхня оцінка проекції перетину); X – ключ таблиці $\bigcup_i t_i \Rightarrow \pi_X(\bigcap_i t_i) = \bigcap_i \pi_X(t_i)$ (достатня умова дистрибутивності проекції відносно перетинів);

6) $\pi_X(t_1 \setminus_R t_2) \supseteq \pi_X(t_1) \setminus_{R \cap X} \pi_X(t_2)$ (нижня оцінка проекції різниці);

7) $\pi_X(\pi_Y(t)) = \pi_{X \cap Y}(t)$, або в операторному вигляді $\pi_X \circ \pi_Y = \pi_Y \circ \pi_X = \pi_{X \cap Y}$ (композиція проекцій); зокрема, $\pi_X(\pi_X(t)) = \pi_X(t)$ (ідемпотентність проекції) та $\pi_X(t) = \pi_{X \cap R}(t)$.□

Доведення. При доведенні п. 1 слід скористатися означенням проекції і властивостями обмеження (твердження 2.11 про властивості обмеження, п. 2): $\pi_1^2(s \mid X) = \pi_1^2 s \cap X = R \cap X$, де $s \in t$, а $t \in T(R)$. Крім того, слід врахувати, що довільний рядок схеми $R \cap X$ є обмеженням за множиною X деякого рядка схеми R. ▫

Розглянемо п. 2. Нехай $R \subseteq X$. Враховуючи твердження 2.11, п. 4, маємо $\pi_X(t) = \{s \mid X \mid s \in t\} = \{s \mid s \in t\} = t$.

Нехай тепер $t \neq t_\varnothing$. Припустимо, що $\pi_X(t) = t$ та встановимо включення $R \subseteq X$. Виберемо рядок $s_0 \in t$. Тоді $s_0 \mid X \in \pi_X(t)$, тобто $s_0 \mid X = s'$ для деякого

$s' \in t$ згідно з припущенням. За твердженням 2.11, п. 4 маємо: $\pi_1^2(s_0 \mid X) = \pi_1^2 s_0 \bigcap X = R \bigcap X = \pi_1^2 s' = R$, звідки $R \bigcap X = R$, тобто $R \subseteq X$. ▫

Достатність в п. 3 випливає із зображення проекції через повний образ (твердження 1.1, п. 1) і збереження порожньої множини $\varnothing$ повним образом (твердження 2.2, п. 6). Для доведення необхідності треба врахувати ті самі факти, а також тотальність обмеження вигляду $\upharpoonleft X : S \to S$. ▫

Розглянемо п. 4. Нехай $\pi_X(t) = t_\varepsilon$. З п. 3 випливає, що $t \neq t_\varnothing$ (перевіряється від супротивного), покажемо, що $X \bigcap R = \varnothing$. Зафіксуємо рядок $s_0 \in t$. Тоді $s_0 \mid X \in \pi_X(t) = \{\varepsilon\}$, тобто $s_0 \mid X = \varepsilon$. Візьмемо проекції від обох частин останньої рівності, тоді з твердження 2.11, п. 2 маємо $\pi_1^2 s_0 \bigcap X = R \bigcap X = \varnothing$. Обернена імплікація встановлюється аналогічно. ▫

Включення пп. 5-6 випливають із зображення проекції (твердження 1.1, п. 1), верхної оцінки повного образу перетину (твердження 2.2, п. 3) та нижньої оцінки повного образу різниці (твердження 2.2, п. 7).

Для доведення рівності з п. 5 (достатньої умови дистрибутивності проекції відносно перетинів) треба скористатися зображенням проекції (твердження 1.1, п. 1), достатньою умовою дистрибутивності повного образу відносно перетинів (твердження 2.3, п. 1) та наступною очевидною властивістю ключа: X – ключ таблиці $t \Leftrightarrow \upharpoonleft X \mid t : t \to S$ – ін'єкція (тобто операція $\upharpoonleft X$ ін'єктивна на t). ▫

Розглянемо п. 7. На підставі властивостей повного образу і обмеження (твердження 2.2, п. 4 і твердження 2.11, п. 5), отримуємо ланцюжок рівностей: $\pi_X(\pi_Y(t)) = \upharpoonleft X[\upharpoonleft Y[t]] = \upharpoonleft X \circ \upharpoonleft Y[t] = (\upharpoonleft X \bigcap Y)[t] = \pi_{X \cap Y}(t)$. Звідси та з доведеного п. 2 випливають рівності $\pi_X(t) = \pi_X(\pi_R(t)) = \pi_{X \cap R}(t)$. ▫□

Зауважимо, що виконується аналог п. 5 для проекції різниці таблиць: має місце достатня умова в термінах первинного ключа для дистрибутивності проекції відносно різниці.

Твердження 5.3 (властивості активного домену та насичення). Нехай R – схема таблиці t. Виконуються наступні твердження:

1) $D_{A,t} = \varnothing \Leftrightarrow t = t_{\varnothing} \vee A \notin R$ (критерій порожності активного домену); $C(t) = t_{\varnothing} \Leftrightarrow t = t_{\varnothing}$ (критерій порожності насичення; зокрема, збереження порожньої таблиці $t_{\varnothing}$ насиченням); $C(t) = t_{\varepsilon} \Leftrightarrow t = t_{\varepsilon}$ (критерій рівності насичення спеціальній таблиці t_{ε}; зокрема, збереження таблиці t_{ε} насиченням);

2) $t \subseteq C(t)$ (зростання насичення за теоретико-множинним включенням). □

Доведення. Доведемо п. 1 і почнемо з критерія порожності активного домену. Для цього скористаємось зображенням активного домену (5.1), виглядом $dom\, I_A$ (5.2) та критерієм порожності повного образу (твердження 2.2, п. 6); тоді маємо ланцюжок еквівалентностей:

$$D_{A,t} = \varnothing \Leftrightarrow I_A[t] = \varnothing \Leftrightarrow t \cap domI_A = \varnothing \Leftrightarrow t \cap \bigcup_{\widetilde{R}: A \in \widetilde{R}} S(\widetilde{R}) = \varnothing .$$

Оскільки за припущенням таблиця t має схему R, то $t \subseteq S(R)$ і залишається врахувати наступну кускову схему, що перевіряється безпосередньо:

$$t \cap \bigcup_{\widetilde{R}: A \in \widetilde{R}} S(\widetilde{R}) = \begin{cases} t, & \text{якщо } A \in R, \\ \varnothing, & \text{якщо } A \notin R. \end{cases}$$

Перевіримо критерій порожності насичення. Достатність випливає з зображення насичення (твердження 1.1, п. 3), критерію порожності узагальненого прямого добутку (твердження 4.8, п. 1) та доведеного критерію порожності активного домена. ▫

Необхідність, тобто імплікацію $C(t) = t_{\varnothing} \Rightarrow t = t_{\varnothing}$, доведемо від супротивного.

Отже, нехай $t \neq t_{\varnothing}$. Очевидно, що $t \neq t_{\varepsilon}$ (бо інакше $C(t) = C(t_{\varepsilon}) = t_{\varepsilon} \neq t_{\varnothing}$). Значить, схема R таблиці непорожня. Згідно із зображенням насичення маємо рівність $C(t) = \prod_{A \in R} D_{A,t}$; оскільки таблиця t непорожня, то в силу критерія порожності активного домену всі множини $D_{A,t}$, $A \in R$ непорожні. Але звідси за критерієм порожності узагальненого прямого добутку випливає, що і добуток $\prod_{A \in R} D_{A,t}$ непорожній; прийшли до протиріччя. ▫

Залишається перевірити еквівалентність $C(t) = t_{\varepsilon} \Leftrightarrow t = t_{\varepsilon}$. Достатність випливає прямо з означення насичення; встановимо необхідність. Нехай $C(t) = t_{\varepsilon}$, тобто $C(t)$ має порожню схему. Оскільки за означенням насичення ця операція схему не змінює, то і таблиця t має порожню схему. Але існують всього дві таблиці порожньої схеми – $t_{\varnothing}$ і t_{ε}, причому випадок $t = t_{\varnothing}$ неможливий (оскільки тоді б виконувалась рівність $C(t) = t_{\varnothing}$ за доведеним критерієм порожності насичення). ▫

Розглянемо п. 2. Випадок таблиць порожньої схеми $t \in T(\varnothing)$ перевіряється безпосередньо; нехай далі $t \notin T(\varnothing)$, тобто $R \neq \varnothing$. Нехай $s \in t$, тоді за твердженням 4.8, п. 2 маємо належність $s \in \prod_{A \in R} \{s(A)\}$; оскільки для всіх $A \in R$ виконується включення $\{s(A)\} \subseteq D_{A,t}$, то внаслідок монотонності оператора $\prod$ (див. твердження 4.8, п. 4) маємо належність $s \in \prod_{A \in R} D_{A,t} = C(t)$. ▫□

5.2. Напівгрупа та нижня напіврешітка таблиць за з’єднанням

При дослідженні операції з’єднання використовуються властивості операції об’єднання сумісних функцій (лема 4.4), доведення яких, в свою чергу, спирається на лему 4.3 про властивості відношення сумісності.

Твердження 5.4 (властивості з’єднання). Нехай таблиці t_1, t_2 мають схеми R_1, R_2 відповідно. Тоді виконуються співвідношення:

1) $t_1 \otimes t_2 \in T(R_1 \cup R_2)$;

2) $t_1 \otimes t_2 = t_2 \otimes t_1$ (комутативність з’єднання);

3) $t_1 \otimes (t_2 \otimes t_3) = (t_1 \otimes t_2) \otimes t_3$ (асоціативність з’єднання);

4) $t \otimes t_{\varnothing} = t_{\varnothing} \otimes t = t_{\varnothing}$ (збереження з’єднанням порожньої таблиці $t_{\varnothing}$);

5) $t \otimes t_{\varepsilon} = t_{\varepsilon} \otimes t = t$ (t_{ε} – права і ліва одиниця відносно з'єднання);

6) $R_2 \subseteq R_1 \Rightarrow t_1 \otimes t_2 \subseteq t_1$;

7) $t \otimes t = t$ (ідемпотентність з'єднання). □

Доведення. Належність п. 1 випливає безпосередньо з означення з'єднання. Змістовна інтерпретація така: схема з'єднання отримується (теоретико-множинним) об'єднанням схем таблиць-аргументів. ▫

Пункти 2, 3 випливають з комутативності і асоціативності операції $\bar{\bigcup}$ (лема 4.4), твердження 2.10 (про успадкування властивостей комутативності та асоціативності операції при її розповсюдженні з елементів на множини елементів), а також із зображення з'єднання (твердження 1.1, п. 2). ▫

Доведення п. 4. випливає із зображення операції з'єднання та збереження порожньої множини декартовим добутком і повним образом (твердження 2.2, п. 6). ▫

Рівності п. 5 випливають із зображення операції з'єднання та властивостей відношення сумісності:

$t \otimes t_{\varepsilon} = \bar{\bigcup}[t \times \{\varepsilon\}] = \bar{\bigcup}[\{<s, \varepsilon> | s \in t\}] = \{s \bigcup \varepsilon \,|\, s \in t\} = \{s \,|\, s \in t\} = t$. ▫

Розглянемо п. 6. Нехай $s \in t_1 \otimes t_2$, тоді $s = s_1 \bigcup s_2$ для відповідних $s_1 \in t_1$, $s_2 \in t_2$, причому $s_1 \approx s_2$. Так як $R_2 \subseteq R_1$, то за твердженням 2.11, пп. 1, 4 маємо $s_2 = s_2|R_2 \subseteq s_2|R_1$. Відповідно до властивостей відношення сумісності $s_2|R_1 \subseteq s_1$ (лема 3.1 про критерій функціональності об'єднаня двох функцій, п. 4). Звідси $s_2 \subseteq s_1$, тобто $s = s_1 \bigcup s_2 = s_1 \in t_1$. Отже, $t_1 \otimes t_2 \subseteq t_1$. ▫

Переходимо до останнього п. 7. З попереднього пункту випливає включення $t \otimes t \subseteq t$, тому залишається перевірити обернене включення. Нехай $s \in t$, тоді $s = s \bigcup s$ (ідемпотентність об'єднання функцій), причому $s \approx s$ (рефлексивність відношення сумісності). Звідси та з означення з'єднання випливає належність $s \in t \otimes t$ ▫□

Для введення часткових порядків на носії табличної алгебри встановимо дискретність таблиць відносно теоретико-множинного включення на множині рядків, тобто дискретність ч. в. м. вигляду $\langle t, \subseteq \rangle$. Цей факт безпосередньо випливає з твердження 2.11, п. 10.

Введемо на множині всіх таблиць T бінарне відношення $\lhd$:

$$t_1 \lhd t_2 \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall s_1 (s_1 \in t_1 \Rightarrow \exists s_2 (s_2 \in t_2 \,\&\, s_2 \subseteq s_1)). \qquad (5.3)$$

Введене відношення допускає змістовну інтерпретацію: якщо $t_1 \lhd t_2$, то інформація, представлена в таблиці t_1, продовжує частину інформації, представлену в таблиці t_2.

Твердження 5.5 (будова множини таблиць за відношенням $\lhd$). $< T, \lhd >$ є частково впорядкованою множиною з найменшим елементом $t_\varnothing$ та найбільшим елементом t_ε. □

Доведення. Очевидно, що бінарне відношення $\lhd$, задане як (3), є відношенням коініціальності. Внаслідок дискретності таблиць і впорядкування сім'ї дискретних множин відношенням коініціальності (твердження 3.1), отримуємо, що $< T, \lhd >$ є ч. в. м. з найменшим елементом $t_\varnothing$. ▫

Те, що t_ε – найбільший елемент, випливає з означення відношення $\lhd$ та того очевидного факту, що ε – найменьший елемент ч. в. м. $< S, \subseteq >$. ▫ □

Далі через $\prod$ позначається точна нижня грань (інфімум) множини.

Лема 5.1 (зв'язок між частковим порядком $\lhd$ та з'єднанням). Виконуються наступні твердження:

1) $t_1 \lhd t_1' \wedge t_2 \lhd t_2' \Rightarrow t_1 \otimes t_2 \lhd t_1' \otimes t_2'$ (монотонність з'єднання відносно $\lhd$ за сукупністю аргументів);

2) $t_1 \otimes t_2 = \prod\limits_{\lhd} \{t_1, t_2\}$ (зображення з'єднання через порядок $\lhd$);

3) $t_1 \lhd t_2 \Leftrightarrow t_1 = t_1 \otimes t_2$ (зображення порядку $\lhd$ через з'єднання). □

Доведення. Почнемо з п. 1. Нехай $t_1 \lhd t_1'$ та $t_2 \lhd t_2'$, покажемо, що тоді $t_1 \otimes t_2 \lhd t_1' \otimes t_2'$. Випадок $t_1 \otimes t_2 = t_\varnothing$ тривіальний, з огляду на те, що $t_\varnothing$ є найменшим елементом ч. в. м. $< T, \lhd >$.

Тому, нехай далі $t_1 \otimes t_2 \neq t_\varnothing$ і розглянемо довільний рядок $s \in t_1 \otimes t_2$. За означенням з'єднання існують рядки $s_1 \in t_1$, $s_2 \in t_2$, такі, що $s = s_1 \bigcup s_2$, $s_1 \approx s_2$. Оскільки $t_1 \lhd t_1'$ та $t_2 \lhd t_2'$, то існують рядки $s_1' \in t_1'$ та $s_2' \in t_2'$, такі, що $s_1' \subseteq s_1$, $s_2' \subseteq s_2$. Звідси, з огляду на п. 1 леми 4.3 (про властивості відношення сумісності $\approx$), випливає, що $s_1' \approx s_2'$. Звідси, в свою чергу, за означенням з'єднання випливає, що $s_1' \bigcup s_2' \in t_1' \otimes t_2'$. Залишається врахувати очевидну нерівність $s_1' \bigcup s_2' \subseteq s_1 \bigcup s_2$.

Отже, для довільного рядка $s \in t_1 \otimes t_2$ знайшовся рядок із з'єднання $t_1' \otimes t_2'$ (а саме, $s_1' \bigcup s_2'$), менший за s. Тому за означенням відношення коініціальності маємо шукану нерівність $t_1 \otimes t_2 \lhd t_1' \otimes t_2'$. ▫

Розглянемо п. 2. З означення відношення коініціальності випливає, що $t_1 \otimes t_2 \lhd t_1$ та $t_1 \otimes t_2 \lhd t_2$; таким чином, $t_1 \otimes t_2 \in \{t_1, t_2\}^\nabla$ і залишається показати, що $t_1 \otimes t_2$ є найбільшим елементом вказаного нижнього конуса. Дійсно, нехай $t \in \{t_1, t_2\}^\nabla$, тобто $t \lhd t_1$ та $t \lhd t_2$. З попередньо доведеного пункту (про монотонність з'єднання) випливає нерівність $t \otimes t \lhd t_1 \otimes t_2$; залишається врахувати ідемпотентність з'єднання (твердження 5.4, п. 7). ▫

П. 3 безпосередньо випливає з попереднього п. 2. ▫ □

З твердження 4 випливає, що групоїд $< T, \otimes >$ є ідемпотентною комутативною напівгрупою. Використовуючи добре відомий зв'язок між ідемпотентними комутативними напівгрупами та напіврешітками (див., наприклад, [39; 52]), напівгрупу $< T, \otimes >$ можна перетворити в, наприклад, нижню напіврешітку, вводячи порядок стандартно:

$$t_1 \lhd_\otimes t_2 \overset{def}{\Leftrightarrow} t_1 = t_1 \otimes t_2. \tag{5.4}$$

Наслідок 5.1. Відношення коініціальності на множині таблиць T співпадає з порядком нижньої напіврешітки (комутативної ідемпотентної) напівгрупи $<T,\otimes>$. □

Доведення випливає з означення відношення (5.4) та п. 3 леми 5.1. □

5.3. Узагальнена таблична алгебра

При побудові таблиць в розділі 1 на них накладались наступні обмеження: по-перше, рядки мали скінченні схеми; по-друге, таблиці були скінченними множинами рядків однієї схеми.

Знімаючи ці обмеження, отримуємо узагальнену табличну алгебру $<\widetilde{T},\widetilde{\Omega}_{P,\Xi}>$, де $\widetilde{\Omega}_{P,\Xi} \stackrel{def}{=} \{\bigcup,\bigcap,\setminus,\sigma_p,\pi_X,\otimes,\div_{R_2}^{R_1},\ Rt_\xi,\sim\}_{X,R_1,R_2\subseteq \boldsymbol{A}}^{p\in P,\xi\in\Xi}$ (щоб не укладнювати позначення, за операціями узагальненої табличної алгебри залишаємо ті самі позначення, що і для табличної алгебри).

В даній алгебрі *схемою* називається довільна множина атрибутів (зокрема, нескінченна) $R\subseteq \boldsymbol{A}$, а *таблицею* називається довільна множина рядків (зокрема, схеми рядків можуть бути різні, а кількість рядків в таблиці може бути нескінченною).

Всі сигнатурні операції узагальненої табличної алгебри визначаються за аналогією до однойменних операцій табличної алгебри.

Найскладніший випадок – це випадок операції узагальненого з'єднання (узагальнених) таблиць, докладно розглянутий у розділі 4 (п. 4.2.2, твердження 4.6).

Щодо ділення, то воно вводиться формально як похідна операція, грунтуючись на добре відомому зображенні (див., наприклад, [50, підрозділ 2.13, твердження 2.13.1, п. 10]): $t_1 \div_{R_2}^{R_1} t_2 \stackrel{def}{=} \pi_{R'}(t_1)\setminus\pi_{R'}(\pi_{R'}(t_1)\otimes t_2\setminus t_1)$, де $R' = R_1\setminus R_2$.

Крім того, для введення узагальненого перейменування треба модифікувати означення множини таблиць ξ-допустимих схем T_ξ: множину $\widetilde{T}_\xi$ складають таблиці, схеми (взагалі кажучи, різні) всіх рядків яких повинні бути ξ-допустимими:

$$T_\xi \overset{def}{=} \{t | \forall s(s \in t \Rightarrow \xi[\pi_1^2(s)] \cap (\pi_1^2(s) \setminus dom\xi) = \varnothing\}.$$

Розглядаючи дві вищезазначені алгебри, маємо очевидний зв'язок між ними.

Теорема 5.1. Таблична алгебра є власною підалгеброю узагальненої табличної алгебри. □

Доведення випливає безпосередньо з означень відповідних алгебр. □

Основні результати розділу 5 наступні.

1. Показано монотонність операцій проекції, з'єднання, насичення, перейменування відносно теоретико-множинного включення.

2. Показано дистрибутивність відносно об'єднань операцій проекції, з'єднання, перейменування; наведена природня достатня умова (в термінах ключа) дистрибутивності проекції відносно перетинів.

3. Наведені властивості операцій проекції, насичення, активного домена та з'єднання, при доведенні яких явно використовуються властивості теоретико-множинних конструкцій повного образу, обмеження, конфінальності, сумісності, узагальненого прямого добутку.

4. Введено частковий порядок на множині всіх таблиць T за схемою відношення коініціальності, показано співпадіння цього порядку з частковим порядком нижньої напіврешітки таблиць за з'єднанням.

5. Зняттям обмежень фінітності схем таблиць та самих таблиць, а також вимоги односхемності рядків таблиць побудована узагальнена таблична алгебра, що містить вихідну табличну алгебру як власну підалгебру.

Основні результати розділу наведені в таблиці 1.

Таблиця 5.1 – Основні результати розділу 5

№ п.п.	**Твердження**	**Стисле формулювання**	**Інтерпретація**
(1)	(2)	(3)	(4)
1.	Твердження 5.1.	а) $t_1 \subseteq t_2 \Rightarrow \pi_X(t_1) \subseteq \pi_X(t_2)$; б) $t_1 \subseteq t_1' \,\&\, t_2 \subseteq t_2' \Rightarrow$ $\Rightarrow t_1 \otimes t_2 \subseteq t_1' \otimes t_2'$; в) $t_1 \subseteq t_2 \Leftrightarrow Rt_\xi(t_1) \subseteq Rt_\xi(t_2)$; г) $t_1 \subseteq t_2 \Rightarrow D_{A,t_1} \subseteq D_{A,t_2}$; г') $t_1 \subseteq t_2 \Rightarrow C(t_1) \subseteq C(t_2)$; д) $t \otimes (\bigcup_i t_i) = \bigcup_i t \otimes t_i$; е) $Rt_\xi(\bigcup_i t_i) = \bigcup_{\eta[R]} Rt_\xi(t_i)$.	Операції проекції, з'єднання, насичення, перейменування, активного домену монотонні відносно теоретико-множинного включення. Операції проекції, з'єднання та перейменування дистрибутивні відносно теоретико-множинного об'єднання.
2.	Твердження 5.2.	а) $\pi_X(t) \in T(R \cap X)$, де $t \in T(R)$; б) $R \subseteq X \Rightarrow \pi_X(t) = t$; в) $t \neq t_\varnothing \Rightarrow (R \subseteq X \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \pi_X(t) = t)$; г) $\pi_X(t) = t_\varnothing \Leftrightarrow t = t_\varnothing$; г') $\pi_X(t) = t_\varepsilon \Leftrightarrow t \neq t_\varnothing \,\&$ $\& \, X \cap R = \varnothing$, де $t \in T(R)$; $\pi_X(t_\varepsilon) = t_\varepsilon$;	Схема проекції $\pi_X(t)$ дорівнює $R \cap X$ за умови, що таблиця-аргумент має схему R. Якщо схема таблиці-аргументу є підмножиною параметра X, то при проектуванні таблиця не змінюється.

		д) $\pi_X(\bigcap_i t_i) \subseteq \bigcap_i \pi_X(t_i)$; е) X – ключ таблиці $\bigcup_i t_i \Rightarrow \pi_X(\bigcap_i t_i) = \bigcap_i \pi_X(t_i)$; є) $\pi_X(t_1 \setminus_R t_2) \supseteq$ $\supseteq \pi_X(t_1) \setminus_{R \cap X} \pi_X(t_2)$; ж) $\pi_X \circ \pi_Y = \pi_Y \circ \pi_X = \pi_{X \cap Y}$; $\pi_X \circ \pi_X = \pi_X$.	Для непорожніх таблиць: таблиця не змінюється при проектуванні тоді і тільки тоді, коли схема таблиці-аргументу є підмножиною параметра X. Проекція таблиці порожня тоді і тільки тоді, коли вона сама порожня. Проекція таблиці дорівнює спеціальній таблиці t_ε тоді і тільки тоді, коли таблиця непорожня та її схема не перетинається з параметром проекції X; зокрема, проекція зберігає спеціальну таблицю t_ε. Проекція перетину таблиць включається в перетин проекцій, тобто це верхня оцінка проекції перетину

			таблиць. Достатня умова дистрибутивності проекції відносно перетину таблиць: параметр проекції X повинен бути (первинним) ключем об'єднання таблиць, перетин яких розглядається. Проекція різниці таблиць містить перетин проекцій, обто це нижня оцінка проекції перетину таблиць. Композиція проекцій (послідовне застосування) за параметрами дорівнює проекції за перетином параметрів; зокрема, проекція є ідемпотентним оператором.
3.	Твердження 5.3.	а) $D_{A,t} = \varnothing \Leftrightarrow t = t_{\varnothing} \vee A \notin R$, де $t \in T(R)$; б) $t \subseteq C(t)$.	Критерій порожності активного домена таблиці: активний

			домен атрибута відносно таблиці порожній тоді і тільки тоді, коли таблиця порожня або атрибут не належить схемі таблиці. Насичення є зростаючим оператором за теоретико-множинним включенням.
4.	Твердження 5.4.	а) $t_1 \otimes t_2 \in T(R_1 \bigcup R_2)$, де $t_1 \in T(R_1)$, $t_2 \in T(R_2)$; б) $t_1 \otimes t_2 = t_2 \otimes t_1$; в) $t_1 \otimes (t_2 \otimes t_3) = (t_1 \otimes t_2) \otimes t_3$; г) $t \otimes t_\varnothing = t_\varnothing \otimes t = t_\varnothing$; г') $t \otimes t_\varepsilon = t_\varepsilon \otimes t = t$; д) $R_2 \subseteq R_1 \Rightarrow t_1 \otimes t_2 \subseteq t_1$, де $t_1 \in T(R_1)$, $t_2 \in T(R_2)$; е) $t \otimes t = t$.	Схема з'єднання таблиць є об'єднанням схем таблиць, що з'єднуються. З'єднання є комутативним та асоціативним оператором. З'єднання зберігає порожню таблицю. Спеціальна таблиця t_ε є правою і лівою одиницею за з'єднанням. Якщо схеми таблиць, що з'єднуються, порівнювані відносно

			теоретико-можинного включення, то з'єднання таблиць включається в таблицю більшої схеми. З'єднання є ідемпотентним оператором.
5.	Твердження 5.5.	$<T, \lhd>$ – частково впорядкована множина з найменшим елементом $t_{\varnothing}$ та найбільшим елементом t_{ε}, де $t_1 \lhd t_2 \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall s_1(s_1 \in t_1 \Rightarrow$ $\Rightarrow \exists s_2(s_2 \in t_2 \,\&\, s_2 \subseteq s_1))$.	Відношення $\lhd$, побудоване за схемою відношення коініціальності, виходячи з відношення теоретико-множнного включення рядків, частково впорядковує таблиці; при цьому порожня таблиця – найменший елемент, а спеціальна таблиця t_{ε} – найбільший.
6.	Лема 5.1.	а) $t_1 \lhd t_1' \wedge t_2 \lhd t_2' \Rightarrow$ $\Rightarrow t_1 \otimes t_2 \lhd t_1' \otimes t_2'$; б) $t_1 \otimes t_2 = \prod_{\lhd}\{t_1, t_2\}$, де справа записаний інфімум множини; в) $t_1 \lhd t_2 \Leftrightarrow t_1 = t_1 \otimes t_2$.	З'єднання є монотонним відносно порядку $\lhd$ за сукупністю аргументів. З'єднання таблиць

			співпадає з інфімумом множини таблиць-аргументів за порядком $\triangleleft$, тобто з'єднання виражається через порядок $\triangleleft$. Порядок $\triangleleft$ виражається через з'єднання: таблиці знаходяться у відношенні $\triangleleft$ тоді і тільки тоді, коли «менша» таблиця співпадає із з'єднанням таблиць.
7.	Наслідок 5.1.	Відношення (коініціальності) $\triangleleft$ співпадає з порядком нижньої напіврешітки комутативної ідемпотентної напівгрупи всіх таблиць за з'єднанням.	Інтерпретація по суті в формулюванні.

(1)	(2)	(3)	(4)
8.	Теорема 5.1.	Таблична алгебра (скінченних таблиць скінченних схем, при цьому таблиці складаються з односхемних рядків) є власною підалгеброю узагальненої табличної алгебри.	Сигнатурні операції табличної алгебри допускають природні розширення на узагальнені таблиці, які містять нескінченну кількість необов’язкових односхемних рядків та мають нескінченні схеми.

ЗАКЛЮЧЕННЯ

Робота присвячена теорії загальнозначних теоретико-множинних конструкцій (повний образ множини відносно відношення, обмеження відношення за множиною, проекція відношення, відношення сумісності відношень, відношення конфінальності (коініціальності), устрій множини функцій, впорядкованих за включенням графіків, ін’єктивні відношення, узагальнений прямий добуток (що відповідає індексуванню), узагальнене з’єднання множин функцій) та застосуванню отриманого технічного апарату в теорії табличних алгебр – сучасного аналога класичних реляційних алгебр Кодда.

По суті мова йде про створення теоретико-множинних основ табличних баз даних, про що і було заявлено в назві монографії.

Автори сподіваються, що можна говорити про два обгрунтованих висновка: по-перше, зазначені теоретико-множинні конструкції мають досить розвинену «внутрішню» теорію (яка має право на самостійне життя) та, по-друге, ці конструкції природньо використовуються (змістовно кажучи, «працюють») в теорії табличних алгебр.

Крім того, є підстави говорити і про інші потенціальні застосування. Зазначимо тільки характерний факт: в роботі показано як з використанням повного образу (а точніше кажучи, процедури розповсюдження функцій з елементів на множини елементів в термінах повного образ) природньо будується сильна тризначна логіка Кліні на основі класичної логіки.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Архангельский А.В. Канторовская теория множеств / А.В. Архангельский. – Москва: Изд-во МГУ, 1988. – 112 с.
2. Ахо А. Теория синтаксического анализа, перевода и компиляции. Том 1 / А. Ахо, Дж. Ульман. – Москва: „Мир”, 1978. – 616 с.
3. Барендрегт Х. Ламбда-исчисление. Его синтаксис и семантика / Х. Барендрегт. – Москва: Мир, 1985. – 606 с.
4. Биркгоф Г. Теория решеток / Г. Биркгоф. – Москва: Наука, 1984. – 564 с.
5. Брона Ю.Й. Основні співвідношення в табличних алгебрах / Ю.Й. Брона // Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки. – 1997. – Вип. 3. – С. 143-148.
6. Брона Ю.И. О непрерывности композиций / Ю.И. Брона, Д.Б. Буй // Методы представления знаний в информационных технологиях. Сб. научн. тр. – Киев: Ин-тут кибернетики АН УССР. – 1991. – С. 86-92.
7. Брона Ю.Й. Оптимізація обчислення запитів у реляційних базах даних / Ю.Й. Брона // Питання оптимізації обчислень: міжнародна конференція, 6-8 жовтня 1997 р., Київ, ІК ім. В.М. Глушкова НАНУ: праці. – 1997. – С. 45-49.
8. Брона Ю.Й. Умови декомпозиції без втрат у реляційних базах даних / Ю.Й. Брона // Застосування обчислювальної техніки, математичного моделювання та математичних методів у наукових дослідженнях: IV всеукраїнська наукова конференція, 23-25 вересня 1997 р., Львів, Львівський університет: тези. – 1997. – С. 15.
9. Буй Д.Б. Взаємна незалежність операцій реляційних алгебр /Д.Б. Буй, Ю.Й. Брона // Застосування обчислювальної техніки, математичного моделювання та математичних методів у наукових дослідженнях: всеукраїнська наукова конференція, 19-21 вересня 1995 р., Львів, Львівський університет: тези. – 1995. – С. 18.

10. Буй Д.Б. Властивості відношення конфінальності та устрій множини часткових функцій / Д.Б. Буй, Н.Д. Кахута // Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2006. – Вип. 2. – С. 125-135.

11. Буй Д.Б. Властивості теоретико-множинних конструкцій повного образу та обмеження / Д.Б. Буй, Н.Д. Кахута // Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2005. – Вип. 2. – С. 232-240.

12. Буй Д.Б. Електронний підручник з композиційного підходу до реляційних баз даних: зміст, структура / Д.Б. Буй, Н.Д. Кахута // Проблемы программирования: III международная научно-практическая конференция по программированию (УкрПРОГ 2002), 21-24 мая 2002 г., Киев: труды. – 2002. – № 1-2. – С. 76-79.

13. Буй Д.Б. Операторы замыкания в теории реляционных баз данных /Д.Б. Буй, Ю.И. Брона // Тезисы докладов XI Международной конференции по проблемам теоретической кибернетики. Под ред. С.В. Яблонского. – Ульяновск: Изд-во СВНЦ. – 1996. – С. 29-30.

14. Буй Д.Б. Повний образ, обмеження, проекція, відношення сумісності / Д.Б. Буй, Н.Д. Кахута // Theoretical and Applied Aspects of Program Systems Development: international conference, December 8-10, 2009: abstracts. – Kyiv. – 2009. – С. 244-260.

15. Буй Д.Б. Теоретико-множественные конструкции полного образа, ограничения, конфинальности и совместности в основаниях реляционных баз данных / Д.Б. Буй, Н.Д. Кахута // Интеллектуальные системы и компьютерные науки: международная конференция, 23-27 октября 2006 г., Москва: труды. – 2006. – Т. 1. – С. 72-76.

16. Буй Д.Б. Теоретико-множинні конструкції в теорії реляційних баз даних /Д.Б. Буй, Ю.Й. Брона // Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки. – 1996. – Вип. 1. – С. 216-224.

17. Буй Д.Б. Теорія програмних алгебр композиційного типу та її застосування: дисертація доктора фізико-математичних наук: 01.05.03 –

математичне та програмне забезпечення обчислювальних машин і систем / Буй Дмитро Борисович. – Київ, 2002. – 365 с.
18. Бурбаки Н. Теория множеств / Н. Бурбаки. – Москва: Мир, 1965. – 455 с.
19. Гарсиа-Молина Г. Системы баз данных: [полный курс.: пер. с англ.] / Г. Гарсиа-Молина, Дж. Ульман, Дж. Уидом. – Москва: „Вильямс”, 2004. – 1088 с.
20. Глушков В.М. Алгебра. Языки. Программирование / В.М. Глушков, Г.Е. Цейтлин, Е.Л. Ющенко. – Киев: Наукова думка, 1978. – 318 с.
21. Глушков В.М. Алгебра. Языки. Программирование: [изд. 3-е, перераб. и доп.] / В.М. Глушков, Г.Е. Цейтлин, Е.Л. Ющенко. – Киев: Наукова думка, 1989. – 376 с.
22. Грабер М. Введение в SQL / М. Грабер. – Москва: ЛОРИ, 1996. – 377 с.
23. Грабер М. Справочное руководство по SQL / М. Грабер. – Москва: ЛОРИ, 1997. – 291 с.
24. Дейт Дж. Введение в системы баз даннях: [8-е издание.: пер. с англ.] / Дж. Дейт. – Москва: „Вильямс”, 2005. – 1328 с.
25. Капитонова Ю.В. Математическая теория проектирования вычислительных систем / Ю.В. Капитонова, А.А. Летичевский. – Москва: Наука, 1988. – 295 с.
26. Катленд Н. Вычислимость. Введение в теорию рекурсивных функций / Н. Катленд. – М.: Мир, 1983. – 256 с.
27. Кахута Н.Д. Відношення сумісності, узагальнене з’єднання та узагальнений прямий добуток / Н.Д. Кахута // Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2007. – Вип. 4. – С. 167-173.
28. Кахута Н.Д. Застосування теоретико-множинних конструкцій повного образу, обмеження, конфінальності та сумісності в табличних базах даних: дисертація кандидата фізико-математичних наук: 01.05.03 – математичне та програмне забезпечення обчислювальних машин і систем / Кахута Надія Дмитрівна. – Київ, 2010. – 116 с.

29. Кахута Н.Д. Критерії ін’єктивності бінарних відношень / Н.Д. Кахута // Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2007. – Вип. 3. – С. 141-146.

30. Клини С.К. Введение в метаматематику / С.К. Клини. – Москва: ИЛ, 1957. – 526 с.

31. Колянов Г.Н. Консалтинг при автоматизации предприятий: подходы, методы, средства [Електронний ресурс] / Г.Н. Колянов. – Режим доступу: http://www.interface.ru/case/defs.htm.

32. Кон П. Универсальная алгебра / П. Кон. – Москва: Мир, 1968. – 351 с.

33. Коннолли Т. Базы данных: проектирование, реализация и сопровождение: [теория и практика, 2-е изд.: пер. с англ.] / Т. Коннолли, К. Бегг, А. Страчан. – Москва: „Вильямс”, 2000. – 1120 с.

34. Коннолли Т. Базы данных: проектирование, реализация и сопровождение: [теория и практика, 3-е изд.: пер. с англ.] / Т. Коннолли, К. Бегг, А. Страчан. – Москва: „Вильямс”, 2003. – 1440 с.

35. Крёнке Д. Теория и практика построения баз данных: [8-е изд.] / Д. Крёнке. – Санкт-Петербург: „Питер”, 2003. – 800 с.

36. Куратовский К. Топология: В 2 т. / К. Куратовский. – Москва: Мир, 1966. – Т. 1. – 594 с.

37. Лавров И.А. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. – Москва: Наука, 1975. – 240 с.

38. Ляшко І.І. Математичний аналіз. Частина І / І.І. Ляшко, В.Ф. Ємельянов, О.К. Боярчук. – Київ: Вища школа, 1992. – 494 с.

39. Мальцев А.И. Алгебраические системы / А.И. Мальцев. – Москва: Наука, 1970. – 392 с.

40. Мальцев А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции / А.И. Мальцев. – Москва: Наука, 1965. – 391 с.

41. Мальцев А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции / А.И. Мальцев. – Москва: Наука, 1986. – 367 с.

42. Манна З. Теория неподвижной точки программ / З. Манна // Киб. сб. Нов. сер. – М.: Мир, 1978. – Вып. 15. – С. 38-100.
43. Мейер Д. Теория реляционных баз данних /Д. Мейер. – Москва: Мир, 1987. – 608 с.
44. Мельников О.В. Общая алгебра: [в двух томах, под общ. ред. Скорнякова Л.А.] / О.В. Мельников, В.Н. Ремесленников, В.А. Романов и др. – Москва: Наука, 1990. – Т. 1. – 1990. – 592 с.
45. Редько В.Н. Информационный аспект Case-технологий: основные соотношения в табличных алгебрах / В.Н. Редько, Ю.И. Брона, Д.Б. Буй // Проблемы программирования. – 1997. – Вып.1. – С. 5-11.
46. Редько В.Н. К основаниям теории реляционных баз данных: табличные алгебры / В.Н. Редько, Ю.И. Брона, Д.Б. Буй. – Киев: Київський університет, 1996. – 105 с. – Рус. – Деп. в ГНТБ Украины 11.11.96, №3189УК-96.
47. Редько В.Н. К основаниям теории реляционных моделей баз данных / В.Н. Редько, Д.Б. Буй // Кибернетика и системный анализ. – 1996. – №4. – С. 3-12.
48. Редько В.Н. Реляционные алгебры: операции деления и переименования / В.Н. Редько, Ю.И. Брона, Д.Б. Буй // Кибернетика и системный анализ. – 1997. – №5. – С. 3-15.
49. Редько В.Н. Реляционные алгебры: операции проекции и соединения / В.Н. Редько, Ю.И. Брона, Д.Б. Буй // Кибернетика и системный анализ. – 1997. – №4. – С. 89-100.
50. Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови / В.Н. Редько, Ю.Й. Брона, Д.Б. Буй, С.А. Поляков. – Київ: Видавничий дім „Академперіодика", 2001. – 198 с.
51. Риге Ж. Бинарные отношения, замыкания, соответствия Галуа /Ж. Риге // Кибернетический сборник: сборник переводов. – Москва: ИЛ, 1963. – Вып. 7. – С. 129-185.

52. Скорняков Л.А. Элементы теории структур / Л.А. Скорняков. – Москва: Наука, 1982. – 158 с.
53. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. II / Г.М. Фихтенгольц. – Москва: Наука, 1970. – 800 с.
54. Цаленко М.Ш. Моделирование семантики в базах данных / М.Ш. Цаленко. – Москва: Наука, 1989. – 288 с.
55. Цаленко М.Ш. Семантические и математические модели баз данных / М.Ш. Цаленко. – Москва: ВИНИТИ, 1985. – 207 с.
56. Шрейдер Ю.А. Равенство, сходство, порядок / Ю.А. Шрейдер. – Москва: Наука, 1971. – 255 с.
57. Codd E.F. A Data Base Sublanguage Founded on the Relational Calculus / E.F. Codd // ACM-SIGFIDET Workshop on Data Description, Access and Control: international conference, November 11-12, 1971, San Diego, California: proceedings. – 1971. – P. 35-68.
58. Codd E.F. A Relational Model of Data for Large Shared Data Banks / E.F. Codd // Communications of the ACM. – 1970. – Vol. 13, № 6. – P. 377-387.
59. Codd E.F. Further Normalization of Data Base Relational Model / E.F. Codd // Data Base Systems. – 1972. – P. 33-64.
60. Codd E.F. Normalized Data Base Structure: A Brief Tutorial / E.F. Codd // ACM-SIGFIDET Workshop on Data Description, Access and Control: international conference, November 11-12, 1971, San Diego, California: proceedings. – 1971. – P. 1-17.
61. Codd E.F. Relational Completeness of Data Base Sublanguages / E.F. Codd // Data Base Systems. – 1972. – P. 65-93.
62. Codd E.F. Relational Database: A Practical Foundation for Productivity / E.F. Codd // Communications of the ACM. – 1982. – Vol. 25, № 2. – P. 109-117.
63. Codd E.F. The Relational Model for Database Management [2-nd edition] / E.F. Codd. – Pearson:Addison-Wesley, 1990. – 538 p.

64. Davey B.A. Introduction to Lattice and Order / B.A. Davey, H.A. Priestly. – Cambridge: Cambridge University Press, 1990. – 248 p.
65. Elmasri R. Fundamentals of database systems: [4-th edition] / R. Elmasri, S. Navathe. – Pearson: Addison-Wesley, 2004. – 1030 p.
66. The Amsterdam Manifesto on OCL [Електронний ресурс] / S. Cook, A. Kleppe, R. Mitchell, B. Rumpe, J. Warmer, A. Wills // UML 2.0 Request for information response: OMG Analysis & Design PTF. – 1999. – Режим доступу: http://www.trireme.com/ whitepapers/design/components/OCL_manifesto.PDF.
67. www.omg.org // 05-06-06.pdf.

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ ТА СКОРОЧЕНЬ

A	множина атрибутів
D	універсум (універсальна множина)
$\bigcup_R$	об'єднання таблиць схеми R
$\bigcap_R$	перетин таблиць схеми R
$\setminus_R$	різниця таблиць схеми R
σ_p	селекція таблиці за предикатом
π_X	проекція таблиці за множиною атрибутів X
$\div_{R_2}^{R_1}$	ділення таблиці схеми R_1 на таблицю схеми R_2
Rt_ξ	перейменування таблиці згідно відображення ξ
$D_{A,t}$	активний домен атрибута A відносно таблиці t
C	насичення таблиці
$\prod_{i \in I} D_i$	узагальнений прямий добуток
$P(D)$	булеан (множина всіх підмножин) множини D
$P(D^2)$	булеан декартова квадрата універсальної множини D, множина всіх бінарних відношень на універсумі
2^X	множина всіх скінченних підмножин множини X
$\varnothing$	порожня множина
$\{x\}$	сінглтон (одноелементна множина)
$\overline{X}$	доповнення множини X (до універсальної множини)
ε	порожнє бінарне відношення
U^{-1}	бінарне відношення, обернене (інверсне) відношенню U
$U \mid X$	обмеження відношення U за множиною X

$\uparrow X$	оператор взяття обмеження за множиною X, $\uparrow X : P(D^2) \times P(D) \to P(D^2)$
$U[X]$	повний образ множини X відносно бінарного відношення U
$U \circ V$	композиція відношень U і V
$\pi_i^2 U$	проекція бінарного відношення U за i-тою компонентою
$\prec$	відношення конфінальності множин
$\lhd$	відношення коініціальності множин
$\approx$	бінарне відношення сумісності відношень (функцій)
$f_\varnothing$	всюди невизначена функція
$domf$	область означеності функції f
F	сім'я всіх (часткових) функцій на універсумі
$\coprod X$	супремум (точна верхня грань) множини X
$\prod X$	інфімум (точна нижня грань) множини X
X^Δ	верхній конус множини X
X^∇	нижній конус множини X
$[f]$	унарна тотальна операція на булеані універсуму D, отримана розповсюдженням унарної функції f на булеан
$[F]$	бінарна тотальна операція на булеані D, отримана розповсюдженням бінарної функції F на булеан
T	логічне значення істини
F	логічне значення хиби
ω	третє логічне значення логіки Кліні
$\wedge$	операція кон'юнкції
$\vee$	операція диз'юнкції
$\neg$	операція заперечення
$< \{T, F, \omega\}; \wedge, \vee, \neg >$	алгебра тризначної сильної логіки Кліні

$<\{T, F\}; \wedge, \vee, \neg>$	алгебра логіки
I_i^n	селектор за i-тою компонентою
I_j	узагальнений селектор за аргументом j
I_A	узагальнений селектор за атрибутом A
$\otimes$	операція узагальненого з’єднання множин функцій, операція з’єднання таблиць
$\oplus$	ординальна сума частково впорядкованих множин
$\overset{def}{\Leftrightarrow}$	за означенням
$\overset{def}{=}$	дорівнює за означенням
$\square$	кінець формулювання твердження або означення, кінець доведення
▫	кінець логічної частини доведення
п. ч. в. м.	повна частково впорядкована множина
ч. в. м.	частково впорядкована множина

ТЕРМІНОЛОГІЧНИЙ ПОКАЖЧИК