

Університет економіки та права "КРОК"

В.Р.Кігель

ОПТИМІЗАЦІЯ ЛОГІСТИЧНИХ РІШЕНЬ

**Навчальний посібник
для студентів спеціальності "Логістика"
вищих навчальних закладів України**

**Київ
2007**

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів (лист ІТЗО МОНУ № 1.4/18–Г–1500 від 14 вересня 2007 р.)

Схвалено Вченою радою Університету економіки та права "КРОК" (протокол № 7 від 5 липня 2007 р.)

Кігель В.Р. Оптимізація логістичних рішень: Навчальний посібник для студентів спеціальності "Логістика". – К.: Університет економіки та права "КРОК", 2007. – 136 с.

У навчальному посібнику викладено теоретичні основи та математичний інструментарій розв'язування оптимізаційних логістичних задач. Наведено значну кількість поширених оптимізаційних задач логістики, побудовано належні економіко–математичні моделі, ґрунтовно розглянуто методи дослідження та способи розв'язування усіх цих задач з використанням обчислювальної техніки та стандартних програмних інструментів. Процеси проведення розрахунків докладно проілюстровано різноманітними конкретними прикладами. У кожному розділі запропоновано завдання для самостійного опрацювання, виконання яких дозволить студентам поглибити рівень їх теоретичних знань і практичних вмінь з оптимізації логістичних рішень.

Рецензенти:

Бойко І.І., доктор фізико–математичних наук, професор, головний науковий співробітник НАН України;

Григорак М.Ю., кандидат економічних наук, доцент, завідувач кафедри логістики Національного авіаційного університету, голова секції логістики НМК з менеджменту МОНУ;

Терехов В.І., доктор економічних наук, професор, завідувач кафедри менеджменту ЗЕД та логістики Університету економіки та права "КРОК"

ЗМІСТ

ВСТУП	6
РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИКО–МЕТОДОЛОГІЧНІ ТА МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ ОПТИМІЗАЦІЇ ЛОГІСТИЧНИХ РІШЕНЬ, НЕОБХІДНИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ІНСТРУМЕНТАРІЙ ТА ПРОГРАМНІ ЗАСОБИ EXCEL	7
1.1. Процес розв’язування, приклади та загальна постановка оптимізаційних логістичних задач	7
1.2. Основні класи економіко–математичних моделей та методів розв’язування задач оптимізації логістичних рішень	8
1.3. Інструмент “Поиск решения” Excel та загальна методика його використання для розв’язування оптимізаційних логістичних задач	11
1.4. Завдання для самостійного опрацювання	20
РОЗДІЛ 2. ОПТИМІЗАЦІЯ ПЛАНУ ПЕРЕВЕЗЕНЬ ПРОДУКЦІЇ (КЛАСИЧНА ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА)	22
2.1. Загальна постановка класичної транспортної задачі	22
2.2. Економіко–математична модель та умова існування розв’язку класичної задачі про оптимізацію плану перевезень продукції	22
2.3. Розв’язування класичної задачі про оптимізацію плану перевезень продукції з використанням інструменту “Поиск решения” Excel	23
2.4. Завдання для самостійного опрацювання	30
РОЗДІЛ 3. ОПТИМІЗАЦІЯ ПЛАНУ ПОСТАВОК ПРОДУКЦІЇ ДО СПОЖИВАЧІВ З УРАХУВАННЯМ ВІДПУСКНОЇ ЦІНИ НА ПРОДУКЦІЮ У РІЗНИХ ПОСТАЧАЛЬНИКІВ (ВИРОБНИЧО–ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА)	32
3.1. Постановка виробничо–транспортної задачі	32
3.2. Економіко–математична модель та умова існування розв’язку задачі	33
3.3. Розв’язування задачі про оптимізацію плану поставок продукції до споживачів з урахуванням відпускної ціни на продукцію у різних постачальників за методом потенціалів шляхом зведення виробничо–транспортної задачі до транспортної	35
3.4. Розв’язування виробничо–транспортної задачі з використанням інструменту “Поиск решения” Excel	37
3.5. Завдання для самостійного опрацювання	41
РОЗДІЛ 4. ОПТИМІЗАЦІЯ ПЛАНУ РОЗПОДІЛУ ЗАМОВЛЕНЬ НА ПЕРЕВЕЗЕННЯ МІЖ ПЕРЕВІЗНИКАМИ (ЗАДАЧА ПРО ПРИЗНАЧЕННЯ)	42
4.1. Постановка та особливості задачі про призначення; використання логічних змінних з метою відбиття її умов	42

4.2. Оптимізація плану розподілу замовлень на перевезення за критерієм мінімізації загальних витрат	44
4.3. Оптимізація плану розподілу замовлень на перевезення за критерієм мінімізації часу виконання всіх робіт	49
4.4. Завдання для самостійного опрацювання	54
РОЗДІЛ 5. ОПТИМІЗАЦІЯ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНУ ВИРОБНИЦТВА, ЗБЕРІГАННЯ ТА ПОСТАВОК ПРОДУКЦІЇ	56
5.1. Постановка та економіко–математична модель задачі	56
5.2. Приклад розв’язування задачі на ПК	58
5.3. Завдання для самостійного опрацювання	63
РОЗДІЛ 6. ОПТИМІЗАЦІЯ ПЛАНУ ПЕРЕВЕЗЕНЬ ПРОДУКЦІЇ ЗА НАЯВНОСТІ ПРОМІЖНИХ ПУНКТІВ МІЖ ПОСТАЧАЛЬНИКАМИ ТА СПОЖИВАЧАМИ (БАГАТОЕТАПНА ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА)	64
6.1. Загальна характеристика багатоетапних транспортних задач	64
6.2. Розв’язування двохетапної транспортної задачі	65
6.3. Розв’язування багатоетапної транспортної задачі	72
6.4. Завдання для самостійного опрацювання	78
РОЗДІЛ 7. ДОПОМІЖНІ ОПТИМІЗАЦІЙНІ ЗАДАЧІ НА ТРАНСПОРТНІЙ МЕРЕЖІ	80
7.1. Визначення найдешевшого транспортного маршруту між заданими двома несуміжними пунктами транспортної мережі	80
7.2. Визначення максимального потоку від одного до іншого несуміжних пунктів транспортної мережі	85
7.3. Завдання для самостійного опрацювання	89
РОЗДІЛ 8. ОПТИМАЛЬНИЙ ВИБІР МІСЦЯ РОЗТАШУВАННЯ РОЗПОДІЛЬЧОГО ЦЕНТРУ	90
8.1. Вибір оптимального місця розташування сховища пального	90
8.2. Визначення оптимального місця розміщення нового проміжного розподільчого центру – вузлу транспортної мережі	93
8.3. Завдання для самостійного опрацювання	99
РОЗДІЛ 9. ОПТИМІЗАЦІЯ РІШЕНЬ ЩОДО УПРАВЛІННЯ ЗАПАСАМИ: БАЗОВА ОДНОПРОДУКТОВА ЗАДАЧА	101
9.1. Базова однопродуктова задача управління запасами; її економіко–математична модель	101
9.2. Аналітичне розв’язування базової однопродуктової задачі	103
9.3. Приклад: оптимальне управління виробництвом та зберіганням виготовленої продукції	104
9.4. Стійкість розв’язку задачі оптимального управління запасами щодо незначної варіації оптимальних значень керованих параметрів	109
9.5. Завдання для самостійного опрацювання	112

РОЗДІЛ 10. ОСНОВНІ МОДИФІКАЦІЇ БАЗОВОЇ ОДНОПРОДУКТОВОЇ ЗАДАЧІ УПРАВЛІННЯ ЗАПАСАМИ	113
10.1. Оптимальне управління запасами за умов заборони дефіциту продукції	113
10.2. Оптимальне управління запасами за умов, що поповнення запасів здійснюється миттєво	116
10.3. Оптимальне управління запасами за умов, що дефіцит заборонено, а поповнення запасів здійснюється миттєво (класична задача управління запасами)	119
10.4. Завдання для самостійного опрацювання: Оптимальне управління "запасами" за відсутності умов для зберігання виготовленої продукції	122
РОЗДІЛ 11. ОПТИМІЗАЦІЯ РІШЕНЬ ЩОДО УПРАВЛІННЯ БАГАТОПРОДУКТОВИМИ ЗАПАСАМИ	123
11.1. Економіко–математична модель задачі	123
11.2. Аналітичне розв’язування задачі оптимального управління багатопродуктовими запасами	124
11.3. Розв’язування задачі оптимального управління багатопродуктовими запасами на комп’ютері	126
11.4. Завдання для самостійного опрацювання	134
ЛІТЕРАТУРА	135

ВСТУП

Дисципліна “Оптимізація логістичних рішень” вивчається студентами старших курсів вищих навчальних закладів України, які навчаються за освітньо-професійними програмами підготовки магістрів або спеціалістів з логістики.

Об’єктом дисципліни виступають логістичні системи та процеси, а предметом – оптимізаційні задачі, що виникають у логістичній діяльності, економіко-математичні моделі та методи розв’язування таких задач з використанням сучасної обчислювальної техніки та відповідного програмного забезпечення.

Прикладами оптимізаційних логістичних задач є задача формування найекономічнішого плану перевезень продукції, сировини або інших виробничих ресурсів від постачальників до споживачів, задача визначення якнайкращого місця розташування нового розподільчого центру логістичної мережі, задача визначення оптимальної стратегії управління запасами тощо.

Метою викладання дисципліни “Оптимізація логістичних рішень” є формування у студентів навичок розробки та обґрунтування рішень щодо управління та розвитку логістичних систем, інтеграції, координації та здійснення логістичних функцій, оптимізації логістичних ланцюгів та взаємодії їх різних ланок.

Основними завданнями викладання дисципліни є такі:

- оволодіння студентами теорією прийняття оптимальних логістичних рішень;
- формування вмінь моделювання логістичних процесів;
- формування навичок застосування методів та інструментів прийняття оптимальних логістичних рішень у різних функціональних областях логістики.

Вивчення дисципліни базується на загальних знаннях економічної теорії, менеджменту та логістики й взаємопов’язане з дисциплінами “Основи теорії систем і системного аналізу”, “Дослідження операцій”, “Основи менеджменту”, “Логістика”, “Функціональна логістика”, “Інтегровані матеріальні потоки”, “Управління ризиками в логістиці”, “Логістичне обслуговування”, “Логістика зовнішньоекономічних операцій”, “Міжнародна логістика” тощо.

Знання та вміння, отримані студентами в результаті вивчення дисципліни “Оптимізація логістичних рішень”, будуть потрібні їм при проходженні виробничої практики, написанні дипломних робіт і в подальшій професійній діяльності.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИКО–МЕТОДОЛОГІЧНІ ТА МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ ОПТИМІЗАЦІЇ ЛОГІСТИЧНИХ РІШЕНЬ, НЕОБХІДНИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ІНСТРУМЕНТАРІЙ ТА ПРОГРАМНІ ЗАСОБИ EXCEL

- 2.1. Процес розв’язування, приклади та загальна постановка оптимізаційних логістичних задач
- 2.2. Основні класи економіко–математичних моделей та методів розв’язування задач оптимізації логістичних рішень
- 2.3. Інструмент “**Поиск решения**” Excel та загальна методика його використання для розв’язування оптимізаційних логістичних задач
- 2.4. Завдання для самостійного опрацювання

1.1. Процес розв’язування, приклади та загальна постановка оптимізаційних логістичних задач

Оптимізацію логістичних рішень здійснюють на основі всебічного аналізу комплексу взаємозалежних чинників, визначення та порівняльної оцінки можливих альтернатив і допустимих планів дій.

Для знаходження розв’язку оптимізаційної логістичної задачі використовують економіко–математичні методи моделювання та оптимізації, а також обчислювальну техніку та необхідне програмне забезпечення.

Процес оптимізації логістичних рішень із використанням економіко–математичного інструментарію складається з таких основних етапів:

- усвідомлення проблемної ситуації, формулювання цілі та визначення обмежень;
- розробка економіко–математичної моделі;
- вибір методів і програмних засобів для проведення розрахунків;
- підготування вихідної інформації;
- пошук і аналіз варіантів рішення;
- ухвалення рішення та затвердження плану його реалізації;
- контроль за виконанням рішення й оцінка результатів;
- підсумковий аналіз проблемної ситуації та її переосмислення (з поверненням до першого етапу).

Отже, оптимізацію логістичних рішень слушно розглядати скоріше як циклічний процес, що постійно відновлюється, а не лише як окремий акт цього процесу.

Зверніть увагу, що економіко–математичне моделювання, тобто запис у математичній формі цілі та обмежень, що відповідають проблемній ситуації, є важливим етапом процесу оптимізації логістичних рішень.

Прикладами оптимізаційних логістичних задач є такі:

- формування найекономічнішого плану перевезень продукції, сировини або інших виробничих ресурсів від постачальників до споживачів – безпосередньо або через певні розподільчі центри;
- визначення максимальної пропускної спроможності транспортної мережі;
- визначення найдешевшого транспортного маршруту між двома заданими пунктами транспортної мережі;
- вибір якнайкращого місця розташування нового розподільчого центру логістичної мережі;
- визначення оптимальної стратегії управління постачанням виробничих ресурсів або готової продукції;
- формування оптимального плану реального інвестування з метою забезпечення необхідного приросту виробничих потужностей логістичних систем;
- розробка систем оптимального управління запасами сировини, інших виробничих ресурсів, виготовленої продукції тощо.

У загальному вигляді оптимізаційна логістична задача має вигляд:

$$\left. \begin{array}{l} y = f(x) \rightarrow \max (\min) \\ x \in X \end{array} \right\} \quad (1.1)$$

де X – множина допустимих планів (альтернатив, дій, попередніх варіантів логістичних рішень); f – числова функція, визначена на множині X , яка разом із вимогою максимізації або мінімізації називається цільовою функцією.

Розв'язок оптимізаційної логістичної задачі (1.1) утворює пара $\langle X^*, y^* \rangle$, де X^* – множина оптимальних планів, y^* – оптимальне (максимальне, найбільше або мінімальне, найменше – залежно від оптимізаційної спрямованості) значення цільової функції, що досягається нею на множині допустимих планів X . Часто обмежуються частинним (а не загальним) розв'язком задачі, визначаючи лише один з множини оптимальних планів, а не всю цю множину.

Знаходять розв'язок оптимізаційної логістичної задачі з використанням спеціальних математичних методів оптимізації, комп'ютерних програм та засобів обчислювальної техніки на основі належної вихідної інформації.

1.2. Основні класи економіко–математичних моделей та методів розв'язування задач оптимізації логістичних рішень

Довільна оптимізаційна логістична задача містить дві складові: цільову функцію та обмеження. Цільова функція формалізує критерій оптимальності, за яким серед альтернативних варіантів логістичних рішень визначається якнайкращий. Обмеження, у свою чергу, визначають множину допустимих альтернатив. Обмеження подаються у вигляді нерівностей та/або рівнянь.

Найчастіше оптимізаційні логістичні задачі є багатовимірними та в узагальненій формі мають вигляд:

$$\left. \begin{aligned} y = f(x_1, \dots, x_n) &\rightarrow \max (\min) \\ g_i(x_1, \dots, x_n) &\leq 0, \quad i = \overline{1, m} \\ h_k(x_1, \dots, x_n) &= 0, \quad k = \overline{1, p} \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

де $x_1, \dots, x_n$ та y – дійсні змінні (керовані параметри), перші n з яких є основними та утворюють план $x = (x_1, \dots, x_n)$ задачі, а остання показує відповідне значення цільової функції; $f, g_i, i = \overline{1, m}, h_k, k = \overline{1, p}$, – числові функції змінних $x_1, \dots, x_n$. Перша функція є цільовою, а інші використовуються з метою відбиття множини допустимих планів.

Якщо в (1.2) кожна з функцій $f, g_i, i = \overline{1, m}$ та $h_k, k = \overline{1, p}$, лінійна, маємо задачу лінійного програмування; у супротивному випадку – задачу нелінійного програмування. Поширеними оптимізаційними логістичними задачами є лінійні. Нелінійні цільова функція або окремі обмеження зустрічаються у випадках, коли залежності між певними змінними мають нелінійний характер.

Серед обмежень оптимізаційної логістичної задачі можуть зустрічатися особливі – наприклад, обмеження на знак певних змінних або вимоги щодо їх цілочисловості. Такі обмеження виокремлюють, називаючи невиокремлені обмеження основними, а виокремлені – додатковими. Якщо серед додаткових обмежень немає вимог цілочисловості, маємо задачу математичного програмування (лінійну або нелінійну) з неперервними змінними; у супротивному випадку – коли одна або кілька змінних мають набувати лише цілочислових (у більш загальному випадку – дискретних) значень – задачу цілочислового (дискретного) математичного програмування.

Скажімо, задача про оптимізацію плану перевезень продукції може бути задачею математичного програмування з неперервними змінними, які показують обсяги перевезень за відповідними маршрутами, а задача про визначення оптимального місця розташування нового розподільчого центру логістичної мережі – задачею математичного програмування з цілочисловими змінними (точніше, логічними 0–1 змінними), які значеннями 1 або 0 характеризують вибір або, навпаки, відмову від вибору певного пункту для розміщення у ньому нового розподільчого центру.

Тип задачі (лінійна, нелінійна, дискретна) визначає методи, які використовуватимуться для її розв’язку, а саме:

- лінійного програмування (симплекс–метод, двоїстий симплекс–метод, інші);
- цілочислового програмування (методи відтинань, розгалуженого пошуку, комбінаторні, евристичні, випадкового пошуку);
- нелінійного програмування (прямі, непрямі; проектування, лінеаризації тощо);

- інші (залежно від особливостей задачі, що розв'язується).

Розгорнутий опис методів лінійного, цілочислового та нелінійного програмування наведено в спеціальній літературі з математичного програмування, дослідження операцій, методів оптимізації тощо. Наприклад, у навчальному посібнику¹ викладено: симплекс–метод (включаючи геометричну ілюстрацію та метод штучного базису); теорію двоїстості у лінійному програмуванні та прикладні аспекти використання її результатів; техніку післяоптимізаційного аналізу задачі лінійного програмування (існування альтернативних оптимальних планів; варіація коефіцієнтів цільової функції, компонентів вектору обмежень, коефіцієнтів при змінних у системі основних обмежень, введення до задачі додаткового обмеження тощо). Докладно розглянуто метод потенціалів для розв'язування транспортної задачі: класичної та з певними особливостями у постановці (заборона на перевезення або фіксованими обсягами перевезень за окремими маршрутами; виробничо–транспортної; двохетапної), а також задачі про призначення. Опрацьовано методи цілочислового лінійного програмування: відтинань, розгалуженого пошуку; методи одновимірної оптимізації: прямі (рівномірного та рівномірного випадкового пошуку; ламаних; пошуку на основі золотого перерізу), непрямі (класична схема на основі пошуку стаціонарних точок; половинного поділу /пошуку Больцано/; дотичних; січних), а також методи майже половинного поділу та стохастичного програмування з проектуванням. Викладено методи нелінійного програмування для розв'язування нелінійних оптимізаційних задач без обмежень: класична схема з використанням необхідних та достатніх умов оптимальності, непрямі (градієнтні – з точною або наближеною оптимізацією крокового множника, з обмеженим або сталим кроком, з вибором крокового множника за методом розбіжного ряду, метод важкої кульки, прискорений багатокроковий, спряжених напрямів; Ньютона–Рафсона, включаючи дві його модифікації; квазіньютонівські), прямі (на основі скінченно–різницевої апроксимації /правої або симетричної/ градiente цільової функції, стохастичних квазіградієнтів, покоординатного підйому, конфігурацій, пошуку за деформівним многогранником); методи нелінійного програмування для дослідження та розв'язування оптимізаційних задач з обмеженнями: класична схема з використанням умов оптимальності та теорії двоїстості у математичному програмуванні; проектування; можливих напрямів; лінеаризації; з використанням функцій штрафу (включаючи методи внутрішньої та зовнішньої точки).

Щодо інших методів та задач оптимізації зазначимо таке. Широке коло оптимізаційних задач допускають постановку та розв'язування з використанням спеціального рекурентного підходу. Згідно з ним вихідна задача подається як деяка сукупність простіших оптимізаційних задач, немов би вкладених одна в одну. Послідовне розв'язування таких задач спирається

¹ Кігель В.Р. Елементи лінійного, цілочислового лінійного, нелінійного програмування: Навчальний посібник. – К.: ІСДО, 1995. – 400 с.

на вже знайдений розв'язок попередніх задач і зрештою призводить до знаходження розв'язку вихідної задачі. Відповідні методи та задачі об'єднуються під назвою динамічного програмування. Існують також задачі та методи стохастичного програмування, які поряд з детермінованими враховують стохастичні фактори. Одночасно з'ясувалося, що методи стохастичного програмування з успіхом використовуються й для розв'язування складних детермінованих оптимізаційних задач шляхом належної організації процесу випадкового пошуку розв'язку. Відомі також задачі і методи параметричного програмування, в яких окремі некеровані чинники є одночасно залежними від певних параметрів. Існують методи дробово–лінійного та квадратичного програмування – для оптимізаційних задач з лінійними обмеженнями та дробово–лінійною або квадратичною цільовою функцією, задачі та методи сітьового (потокowego) програмування, інші класи оптимізаційних задач та методів їх розв'язування.

Реалізацію оптимізаційних методів для розв'язування оптимізаційних логістичних задач доцільно здійснювати з використанням засобів обчислювальної техніки та спеціального програмного забезпечення. Важливим і цікавим є факт, що прогрес у сфері економіко–математичного моделювання та методів оптимізації відбувається майже точно у відповідності з прогресом у галузі комп'ютеризації.

1.3. Інструмент “Поиск решения” Excel та загальна методика його використання для розв'язування оптимізаційних логістичних задач

Інструмент “Поиск решения” призначений для розв'язування оптимізаційних задач або рівнянь чи систем рівнянь з використанням комп'ютерної техніки.

Для завантаження інструменту “Поиск решения” після запуску електронної таблиці Excel потрібно виконати такі дії:

1. В меню “Сервис” обрати команду “Надстройки”.
2. В діалоговому вікні “Надстройки” встановити прапорець на інструменті “Поиск решения” та натиснути на кнопку ОК.

Процедура пошуку рішення дозволяє знаходити оптимальне (найбільше або найменше) чи наперед задане значення змінної (цільової функції), формула обчислення якої знаходиться у клітинці, що має назву цільової (“Целевая ячейка”). Процедура працює з групою інших клітинок, які безпосередньо або опосередковано зв'язані з формулою в цільовій клітинці.

Щоб знайти потрібне значення (оптимальне або наперед задане) цільової функції, процедура пошуку рішення за спеціальними алгоритмами визначає значення усіх змінних, які впливають на результат. Множину можливої варіації значень змінних можна обмежувати. Необхідні обмеження у разі потреби вводять щодо значень клітинок з незалежними змінними, а також клітинок з кінцевими або проміжними значеннями, які прямо чи опосередковано зв'язані між собою.

При записі обмежень можуть використовуватися наступні п'ять умовних операторів:

- 1) $\leq$ – менше або дорівнює;
- 2) $=$ – дорівнює;
- 3) $\geq$ – більше або дорівнює;
- 4) **цел** – умова цілочисловості;
- 5) **двоич** – умова отримати логічні (лише 0 або 1) значення.

Обмеження про цілочислові або логічні значення можна вводити лише щодо таких незалежних змінних, значення яких міститимуться у клітинках “изменяемые”.

Розв’язування оптимізаційної задачі з використанням інструменту пошуку рішення Excel полягає у такому:

1. Обрати команду “**Поиск решения**” в меню “**Сервис**”. Результатом виконання цієї команди буде поява на екрані діалогового вікна “**Поиск решения**” (рис. 1.1).

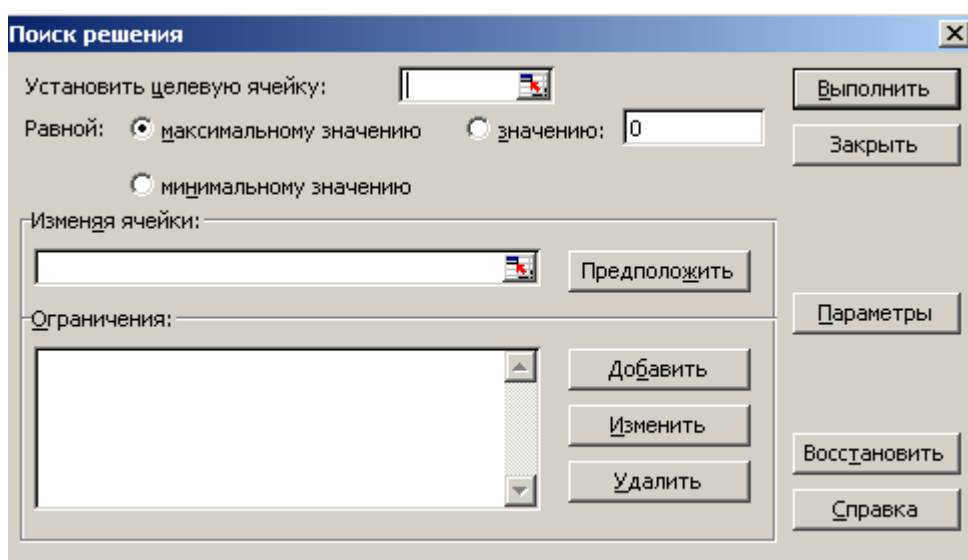


Рис. 1.1. Діалогове вікно “Поиск решения”

2. У полі “**Установить целевую ячейку**” вказати адресу клітинки із значенням цільової змінної – саме в цій клітинці має бути наведена формула обчислення значень цільової функції.

3. Ввімкнути у відповідне положення перемикач вибору оптимізаційного спрямування, а саме:

- **максимальному значенню** – для задачі максимізації;
- **минимальному значенню** – для задачі мінімізації;
- **значенню** – далі слід ввести конкретне числове значення – для розв’язування рівнянь.

4. У полі “**Изменяя ячейки**” вказати адреси клітинок з незалежними змінними. Різні клітинки зазначаються через кому. Суміжні клітинки можуть зазначатися як масив. Загальна кількість клітинок – до 200.

/Щоб автоматично визначити всі клітинки, що впливають на цільову змінну, можна натиснути кнопку **“Предположить”**./

5. У поле **“Ограничения”** ввести усі обмеження задачі. Якщо маємо лінійну задачу, для якої в параметрах пошуку рішення (дивись далі) буде встановлено прапорець **“Линейная модель”**, кількість обмежень не регламентується. Навпаки, при розв’язуванні нелінійних задач, додатково до умов цілочисловості змінних, можна ввести ще понад 100 обмежень.

6. Натиснути кнопку **“Выполнить”**. Через мить на екрані з’явиться вікно з результатами роботи процедури пошуку рішення.

7. Для збереження результатів перемикач **“Результаты поиска решения”** слід увімкнути у положення **“Сохранить найденное решение”**. Якщо зберігати результати не потрібно, цей перемикач слід увімкнути у положення **“Восстановить исходные значения”**.

Анотована інформація про функції або команди діалогового вікна **“Поиск решения”** наведена у таблиці 1.1.

Таблиця 1.1

Призначення функцій та команд діалогового вікна **“Поиск решения”**

Функція або команда	Призначення
Установить целевую ячейку	Щоб вказати цільову клітинку робочого аркушу Excel, в якій міститься формула обчислення значення цільової функції
Равной	Щоб вказати оптимізаційне спрямування цільової функції (до максимуму чи до мінімуму) або вимогу до цієї функції набрати певне числове значення – це число слід ввести у відповідне поле діалогового вікна
Изменяя ячейки	Щоб вказати адреси тих клітинок робочого аркушу Excel, які відведені для значень незалежних змінних
Предположить	Для автоматичного пошуку клітинок, значення в яких безпосередньо впливають на цільову функцію, записану формулою в цільовій клітинці. Результат пошуку буде відображено в полі “Изменяя ячейки”
Ограничения	Щоб показати обмеження оптимізаційної задачі, яка розв’язується
Добавить	Для виклику діалогового вікна “Добавить ограничение”
Изменить	Для виклику діалогового вікна “Изменить ограничение”
Удалить	Щоб зняти відповідне обмеження
Выполнить	Щоб розпочати процедуру пошуку рішення сформованої задачі
Закрыть	Щоб вийти з діалогового вікна “Поиск решения” без запуску процедури пошуку рішення

Функція або команда	Призначення
Параметры	Щоб викликати діалогове вікно “Параметры поиска решения” . Це дозволить завантажити чи зберегти умови задачі та вказати індивідуальні значення спеціальних параметрів пошуку рішення
Восстановить	Щоб очистити усі поля діалогового вікна та відновити значення параметрів пошуку рішення, які передбачені за умовчанням
Справка	Щоб звернутися до довідкової системи “Поиска решения”

Розпочинають роботу з процедурою **“Поиск решения”** після планування структури робочого аркушу Excel (слід визначити клітинки для цільової змінної, незалежних змінних, потрібних проміжних чи кінцевих результатів, вихідних даних; вписати необхідні пояснення, розграфити таблиці тощо), введення усіх потрібних формул для обчислення значень цільової функції, проміжних і кінцевих результатів, а також внесення усіх потрібних вихідних числових даних.

Щоб записати нове обмеження задачі, кнопкою **“Добавить”** викликають діалогове вікно **“Добавить ограничение”**, а щоб внести зміни у раніше введене обмеження, його виділяють та кнопкою **“Изменить”** викликають діалогове вікно **“Изменить ограничение”**. Ці вікна схожі на вигляд між собою – рис. 1.2 – і зовні різняться лише назвою.

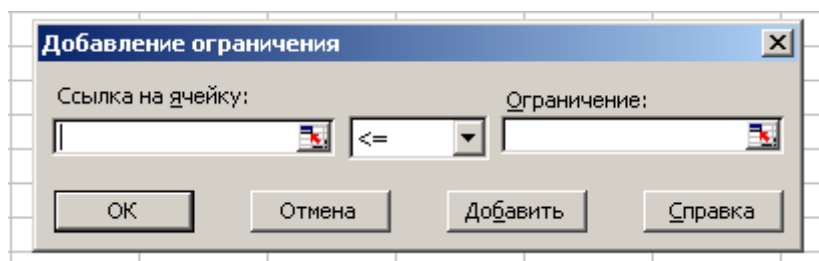


Рис. 1.2. Діалогове вікно **“Добавить ограничение”**;
(**“Изменить ограничение”**)

Опис діалогових вікон **“Добавить ограничение”** або **“Изменить ограничение”** та правила щодо їх використання:

Ссылка на ячейку – у відповідне поле потрібно занести номер або діапазон клітинок, значення в яких слід обмежити, вони відповідають лівій частині обмеження;

Ограничение – спочатку із списку, що розкривається, слід обрати потрібний умовний оператор (**<=**, **=**, **>=**, **цел**, **двоич**), після чого в поле праворуч від обраного оператора ввести праву частину обмеження – число, формулу, посилання на номер або діапазон клітинок тощо;

ОК – закінчення роботи з діалоговим вікном “Добавить ограничение” або “Изменить ограничение”;

Отмена – відмова від роботи з діалоговим вікном;

Добавить – дозволяє перейти до введення чергового нового обмеження без повернення до діалогового вікна “Поиск решения”;

Справка – кнопка виклику довідкової служби.

У складі програмного забезпечення Microsoft Excel в папці Office\Samples є книга з прикладами використання інструменту “Поиск решения” Excel – “Solvamp.xls”.

Інструмент “Поиск решения” дозволяє керувати умовами та варіантами пошуку рішення лінійних або нелінійних задач, зберігати задачі, що розв’язуються, а також звертатися до збережених раніше задач. Параметри та стан окремих елементів керування, які використовуються за умовчанням, придатні для розв’язування більшості нескладних задач. Водночас, при потребі, користувач має можливість обирати індивідуальні параметри пошуку рішення. Для цього у діалоговому вікні “Поиск решения” слід натиснути на клавішу “Параметры”. Внаслідок цього на екрані з’явиться діалогове вікно “Параметры поиска решения” (рис. 1.3). Інформація про це вікно наведена у таблицях 1.2 та 1.3.

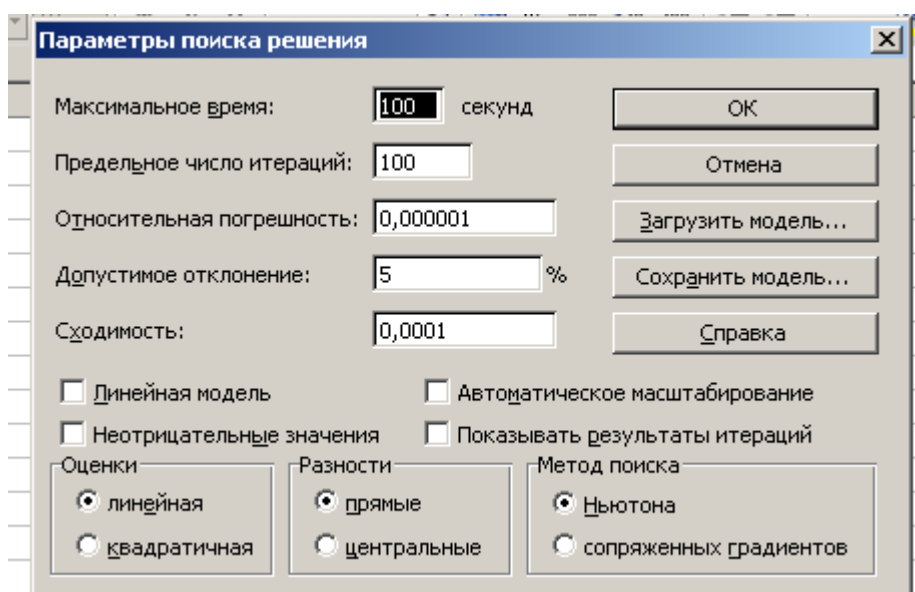


Рис. 1.3. Діалогове вікно “Параметры поиска решения”

Таблиця 1.2

Опис параметрів діалогового вікна “**Параметры поиска решения**”

Параметр	Призначення
Максимальное время	Щоб обмежити час пошуку розв’язку задачі. За умовчанням у полі цього параметру вказано час 100 (у секундах). Дозволяється ввести інше значення, яке не перевищує 32767
Итерации	Для керування часом розв’язування задачі шляхом обмеження кількості проміжних обчислень. Для більшості простих задач досить значення 100, яке обране за умовчанням
Относительная погрешность	Щоб задавати точність обчислень. Ця точність показується у відповідному полі десятковим дробом від 0 (нуля) до 1 (одиниці). Чим меншим є число, тим вищою є точність. За умовчанням використовується значення 0,000001
Допустимое отклонение	Щоб вказати припустиме відхилення від оптимального значення. За умовчанням обрано значення 5 (у відсотках)
Сходимость	Параметр використовується лише щодо нелінійних задач. Якщо відносна зміна значення цільової змінної за п’ять послідовних ітерацій стає меншою від зазначеного у полі цього параметра числа, пошук рішення припиняється. За умовчанням обрано значення 0,0001. Щоб покращити збіжність, значення цього параметру слід зменшити. Межі параметру – від 0 до 1. Слід враховувати, що покращання збіжності може вимагати більшого часу на виконання обчислень
Линейная модель	Доцільно зазначити при розв’язуванні лінійних задач. Це прискорює пошук рішення
Неотрицательные значения	Доцільно використати, якщо значення всіх змінних, які знаходяться в клітинках “ Изменяемые ”, мають набувати лише невід’ємних значень. Це виключає необхідність заносити відповідні обмеження в поле “ Ограничения ” діалогового вікна “ Поиск решения ”
Автоматическое масштабирование	Щоб автоматично нормалізувати значення вхідних та вихідних змінних, якщо вони істотно розрізняються за величиною
Показывать результаты итераций	Після виконання чергової ітерації процес пошуку рішення буде призупинятися, щоб показати поточні результати

Параметр	Призначення
Оценка (далі слід обрати: линейная або квадратичная)	Щоб обрати метод екстраполяції при розв’язуванні нелінійних задач на кожному етапі одновимірного пошуку. Зазвичай квадратична екстраполяція дозволяє отримати результати кращі, аніж лінійна
Разности (далі слід обрати: прямые або центральные)	Щоб обрати метод наближеного обчислення частинних похідних. У більшості випадків можна обрати прямі різниці, але, щоб отримати більш точний розв’язок, слід звернутися до центральних різниць
Метод поиска (далі слід обрати: Ньютона або сопряженных градиентов)	Можна обрати алгоритм нелінійної оптимізації: або квазіньютонівський, або спряжених градієнтів. Перший метод виконує менше ітерацій, але вимагає більше пам’яті. Тому другий метод рекомендують використовувати для великих за розміром задач або для підвищення точності обчислень

Таблиця 1.3

Опис клавіш керування
у діалоговому вікні “**Параметры поиска решения**”

Клавіша	Призначення
ОК	Щоб закрити діалогове вікно
Отмена	Щоб відмовитися від власноруч введених параметрів пошуку розв’язку
Загрузить модель...	Для виклику діалогового вікна “ Загрузить модель ”
Сохранить модель...	Для виклику вікна “ Сохранить модель ”. Ця можливість використовується, якщо на одному робочому аркуші слід зберігати інформацію про кілька задач. Одна (перша) задача зберігатиметься на робочому аркуші автоматично
Справка	Щоб звернутися до довідкової системи про “ Параметры поиска решения ”

Підсумкові повідомлення процедури пошуку рішення залежать від того, чим саме закінчилися обчислення. Якщо задачу розв’язано, отримаємо повідомлення, показані в таблиці 1.4, а якщо розв’язок не було знайдено – повідомлення, показані в таблиці 1.5.

Таблиця 1.4

Повідомлення діалогового вікна “Результаты поиска решения”,
якщо розв’язок задачі знайдено

Можливе повідомлення	Пояснення
Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.	Всі обмеження виконуються з точністю, яка встановлена у діалоговому вікні “ Параметры поиска решения ”. Знайдено потрібне значення цільової функції
Поиск свелся к текущему решению. Все ограничения выполнены.	Відносна зміна значення в цільовій клітинці за останні п’ять ітерацій є меншою, аніж встановлена параметром “ Сходимость ” у діалоговому вікні “ Параметры поиска решения ”. Щоб підвищити точність, слід зменшити значення цього параметру, але подальші розрахунки вимагатимуть більше часу

Таблиця 1.5

Повідомлення діалогового вікна “Результаты поиска решения”,
якщо процедура пошуку рішення не знаходить розв’язку задачі

Можливе повідомлення	Пояснення
Поиск не может улучшить текущее решение. Все ограничения выполнены.	Виявилось неможливим покращити поточний результат. Знайдено наближене рішення, але його покращити або неможливо, або цього не дозволяють зробити вказані у діалоговому вікні “ Параметры поиска решения ” параметри пошуку. Рекомендується змінити значення цих параметрів та знову запустити процедуру пошуку рішення
Поиск остановлен (истекло заданное на поиск время).	За час, що було відведено для розв’язування задачі, позитивного результату не досягнуто. Перемикачі “ Сохранить найденное решение ” та “ Сохранить сценарий ” дозволяють при наступній реалізації процедури пошуку рішення не повторювати вже проведені обчислення

Можливе повідомлення	Пояснення
Поиск остановлен (достигнуто максимальное число итераций).	Максимальної, яку було дозволено, кількості ітерацій виявилось недостатньо, щоб досягти позитивного результату. Перед продовженням пошуку бажано з'ясувати причини зупинки. Щоб не повторювати вже зроблені обчислення при наступній реалізації процедури пошуку рішення, увімкніть перемикач “Сохранить сценарий” або “Сохранить найденное решение”
Значения целевой ячейки не сходятся.	Значення цільової змінної є необмеженим (за абсолютною величиною зростає до нескінченості). Рекомендується перевірити обмеження
Поиск не может найти подходящего решения.	Можливо, що система обмежень є несумісною. Ймовірно також, що Ви припустилися помилок у записі розрахункових формул або обмежень
Поиск остановлен по требованию пользователя.	Це повідомлення з'явиться, якщо в процесі виконання ітерацій в діалоговому вікні “Текущее состояние поиска решения” була натиснута кнопка “Стоп” з метою зупинки процесу пошуку рішення
Условия для линейной модели не удовлетворяются.	Безпідставно встановлено прапорець “Линейная модель” в параметрах пошуку. Спробуйте повторити розрахунки, увімкнувши функцію “Автоматич. масштабирование” . Якщо це не допоможе – зніміть прапорець “Линейная модель”
При поиске решения обнаружено ошибочное значение в целевой ячейке или в ячейке ограничения.	Потрібно уважно перевірити усі формули – деякі з них містять помилки. Можливі також помилки при записі обмежень
Мало памяти для решения задачи.	Потрібно збільшити пам'ять, необхідну для пошуку розв'язку. Для цього слід закрити деякі відкриті файли або програми, які не потрібні для розв'язування задачі

У випадку успішного виконання процедури пошуку рішення та появи діалогового вікна **“Результаты поиска решения”** Ви маєте можливість обрати одну з двох команд:

або **Сохранить найденное решение** – для збереження знайденого розв’язку;

або **Восстановить исходные значения** – для відновлення первісних значень усіх змінних, значення яких містяться у клітинках **“изменяемые”**.

Крім цього, у полі **“Тип отчета”** можна вказати на тип звіту, який буде виведено на окремий аркуш поточної робочої книги Excel. Передбачено наступні три типи звітності:

Результаты. – Використовують для створення звіту, в якому буде вказано цільову клітинку та клітинки **“изменяемые”**, їх вихідні та кінцеві (оптимальні) значення, а також формули та довідкова інформація щодо обмежень задачі.

Устойчивость. – Використовують для формування звіту з інформацією про чутливість розв’язку щодо малих змін значень параметрів у формулі для цільової функції або у формулах для обмежень. /Для цілочислових задач такий звіт не створюється. Для нелінійних задач звіт містить дані про градієнт цільової функції та множники Лагранжа./

Ограничения. – Використовують для створення звіту, в якому буде вказано цільову клітинку та клітинки **“изменяемые”**, їх значення, а також нижні та верхні межі. Ці межі визначають діапазон можливої варіації значень відповідних змінних за умов, що значення інших змінних не міняються. /Для цілочислових задач такий звіт не створюється./

Можна також зберегти сценарій розв’язування задачі, якщо скористатися клавішею **“Сохранить сценарий”**.

Далі ми опрацюємо техніку використання інструменту **“Поиск решения”** Excel для розв’язування конкретних оптимізаційних логістичних задач.

1.4. Завдання для самостійного опрацювання

1. Наведіть змістовні приклади задач оптимізації логістичних рішень.
2. Назвіть основні етапи процесу розв’язування оптимізаційної логістичної задачі, охарактеризуйте зв’язок між ними та обґрунтуйте послідовність їх виконання.
3. Наведіть означення розв’язку оптимізаційної логістичної задачі максимізації. Чи може така задача мати кілька альтернативних розв’язків?
4. Наведіть геометричну ілюстрацію теореми про розв’язність задачі лінійного програмування: задача лінійного програмування є розв’язуваною тоді і тільки тоді, коли виконуються дві умови:
 - 1) множина допустимих планів непорожня;
 - 2) цільова функція (на випадок максимізації) є обмеженою зверху на множині допустимих планів.

5. Наведіть геометричну ілюстрацію теореми про достатні умови існування розв'язку задачі математичного програмування: якщо множина допустимих планів є замкненою та обмеженою підмножиною, а цільова функція неперервна на цій множині, тоді оптимізаційна задача є розв'язуваною.

6. Спробуйте активізувати пакет **"Поиск решения"** на Вашому комп'ютері.

РОЗДІЛ 2. ОПТИМІЗАЦІЯ ПЛАНУ ПЕРЕВЕЗЕНЬ ПРОДУКЦІЇ (КЛАСИЧНА ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА)

- 2.1. Загальна постановка класичної транспортної задачі
- 2.2. Економіко–математична модель та умова існування розв’язку класичної задачі про оптимізацію плану перевезень продукції
- 2.3. Розв’язування класичної задачі про оптимізацію плану перевезень продукції з використанням інструменту “**Поиск решения**” Excel
- 2.4. Завдання для самостійного опрацювання

2.1. Загальна постановка класичної транспортної задачі

Розпочнемо опрацювання оптимізаційних логістичних задач з найпростішої, найвідомішої та поширеної задачі про оптимізацію плану перевезень деякої однорідної продукції безпосередньо від постачальників до споживачів. При складанні плану слід взяти до уваги обсяги запасів цієї продукції у кожного з постачальників, потребу у продукції з боку кожного споживача, а також транспортні тарифи на перевезення одиниці продукції за кожним з маршрутів (від кожного постачальника до кожного з споживачів). Задача полягає у тому, щоб серед усіх допустимих планів перевезень продукції від постачальників до споживачів визначити такий, за якого загальні транспортні витрати були б якнайменшими.

Наведену задачу є сенс вважати класичною транспортною задачею, оскільки саме з неї дослідження операцій розпочало вивчати методи і моделі розв’язування різноманітних задач про оптимізацію планів перевезень продукції.

2.2. Економіко–математична модель та умова існування розв’язку класичної задачі про оптимізацію плану перевезень продукції

Для побудови економіко–математичної моделі задачі про оптимізацію плану перевезень продукції спочатку наведемо потрібні позначення.

Відомі величини (вихідні дані, некеровані параметри):

m – кількість постачальників; номер окремого постачальника позначимо через i ($i = \overline{1, m}$);

a_i – запас продукції у i -го постачальника ($i = \overline{1, m}$);

n – кількість споживачів; j – номер окремого споживача ($j = \overline{1, n}$);

b_j – попит на продукцію з боку j -го споживача ($j = \overline{1, n}$);

c_{ij} – транспортний тариф, тобто витрати на перевезення одиниці продукції від i -го постачальника до j -го споживача ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$).

Невідомі величини (керовані змінні):

x_{ij} – обсяг перевезень продукції від i -го постачальника до j -го споживача ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$);

z – загальні транспортні витрати, що відповідають певному плану перевезень продукції.

За наведених позначень економіко–математична модель класичної транспортної задачі набирає вигляду:

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (2.1)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i \quad (i = \overline{1, m}) \quad (2.2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1, n}) \quad (2.3)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}) \quad (2.4)$$

Цільова функція (2.1) задачі відбиває вимогу мінімізувати загальні транспортні витрати, пов'язані з перевезенням усієї необхідної продукції від постачальників до споживачів.

Обмеження задачі враховують: (2.2) – наявний запас продукції у кожного з постачальників; (2.3) – потреби кожного із споживачів; (2.4) – вимоги про невід'ємність обсягів перевезень продукції за будь яким із маршрутів.

Математично модель (2.1) – (2.4) являє собою задачу лінійного програмування транспортного типу. Для розв'язування цієї задачі можна, наприклад, скористатися або симплекс–методом, або ж методом потенціалів, який є адаптованою до особливостей класичної транспортної задачі версією симплекс–методу.

Умова існування розв'язку класичної транспортної задачі (2.1) – (2.4) полягає у тому, щоб загальні запаси продукції у всіх постачальників дозволяли повністю забезпечити попит кожного із споживачів:

$$\sum_{i=1}^m a_i \geq \sum_{j=1}^n b_j \quad (2.5)$$

Опрацюємо методику розв'язування задачі з використанням обчислювальної техніки на конкретному прикладі.

2.3. Розв'язування класичної задачі про оптимізацію плану перевезень продукції з використанням інструменту “Поиск решения” Excel

Класичну транспортну задачу розглянемо на прикладі задачі оптимізації плану перевезень цегли.

Умови задачі. З трьох заводів $З_1$, $З_2$ і $З_3$, які виготовляють цеглу, вона щоденно відвантажується на п'ять будівельних майданчиків $Б_1$, ..., $Б_5$.

Виробничі потужності заводів складають, відповідно, 18, 24 і 28 тис. цеглин на добу. Щоденна потреба будівельників у цеглі дорівнює, відповідно, 8, 10, 12, 15 і 20 тис. цеглин. Цегла перевозиться партіями по 1 тис. цеглин. Витрати (у гривнях) на перевезення однієї партії від заводів до будівельних майданчиків наведено в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1

Цегельний завод	Транспортні тарифи Будівельний майданчик				
	Б ₁	Б ₂	Б ₃	Б ₄	Б ₅
З ₁	25	40	15	20	30
З ₂	60	50	30	55	60
З ₃	40	35	50	30	45

Потрібно визначити оптимальний за критерієм мінімізації загальних транспортних витрат план постачання цеглою будівельних майданчиків. Вся вихідна інформація до цієї задачі наведена на рис. 2.1.

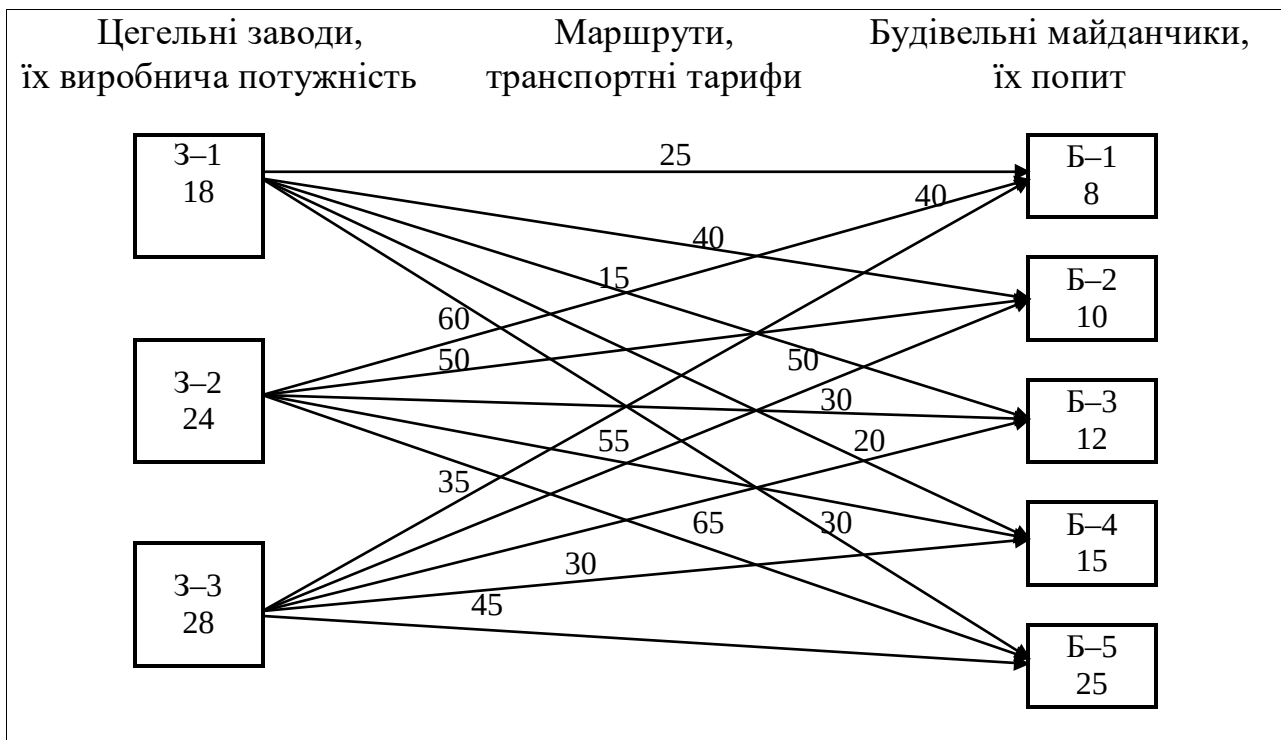


Рис. 2.1. Інформація до задачі про оптимізацію плану перевезень цегли

Економіко–математична модель. Передусім зазначимо, що кількість постачальників цегли – цегельних заводів – дорівнює 3, а кількість споживачів цегли – будівельних майданчиків – 5. Загальні щодобові виробничі потужності постачальників дорівнюють $18+24+28=70$ тис. цеглин, а попит споживачів – $8+10+12+15+20=65$ тис. цеглин. Отже, виробничі потужності достатні для забезпечення наявного попиту, тобто розв’язок задачі існує.

Далі уведемо позначення невідомих: x_{ij} – обсяг перевезень продукції (у тисячах цеглин) від i -го постачальника до j -го споживача ($i = \overline{1, 3}; j = \overline{1, 5}$); z – загальні транспортні витрати (у гривнях), що відповідають певному плану перевезень продукції. Саме такі змінні ми використовували в попередньому підрозділі для побудови економіко–математичної моделі транспортної задачі.

Щоб у подальшому полегшити підготовку робочого аркушу Excel для розв’язування задачі на комп’ютері за допомогою інструменту “Поиск решения”, уведемо допоміжні змінні y_i , $i = \overline{1, 3}$, які показуватимуть обсяги вивезеної від відповідного i -го постачальника продукції, а також змінні v_j , $j = \overline{1, 5}$, – обсяги продукції, ввезеної кожному споживачу.

За наведених позначень та наявних вихідних даних економіко–математична модель задачі, що розглядається, набере вигляду:

Мінімізувати загальні витрати на перевезення цегли:

$$\begin{aligned} z = & 25x_{11} + 40x_{12} + 15x_{13} + 20x_{14} + 30x_{15} + \\ & + 60x_{21} + 50x_{22} + 30x_{23} + 55x_{24} + 60x_{25} + \\ & + 40x_{31} + 35x_{32} + 50x_{33} + 30x_{34} + 45x_{35} \rightarrow \min \end{aligned}$$

при обмеженнях:

а) щодо потужностей постачальників:

$$\begin{aligned} y_i &= \sum_{j=1}^5 x_{ij}, \quad i = \overline{1, 3} \\ 0 &\leq y_1 \leq 18 \\ 0 &\leq y_2 \leq 24 \\ 0 &\leq y_3 \leq 28 \end{aligned}$$

б) щодо попиту споживачів:

$$\begin{aligned} v_j &= \sum_{i=1}^3 x_{ij}, \quad j = \overline{1, 5} \\ v_1 &= 8 \\ v_2 &= 10 \\ v_3 &= 12 \\ v_4 &= 15 \\ v_5 &= 20 \end{aligned}$$

в) щодо невід’ємності основних змінних, які показують обсяги перевезень за відповідними маршрутами:

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1, 3}; j = \overline{1, 5})$$

Зазначимо, що вимога невід’ємності допоміжних змінних y_i ($i = \overline{1, 3}$) є надлишковою через невід’ємність кожної з основних змінних x_{ij} ($i = \overline{1, 3}; j = \overline{1, 5}$), оскільки загальний обсяг вивезеної від постачальника продукції є сумою обсягів перевезень продукції від цього постачальника до кожного із споживачів.

Підготовка робочого аркуша Excel. Домовимося кожен задачу опрацьовувати в окремій книзі Excel, яку називатимемо відповідно до назви задачі, що в ній розв’язується. Отже, створимо файл “Cegla.xls” та розпочнемо роботу на першому аркуші цієї книги, який має назву “Лист 1”.

Виконаємо такі дії.

1. Об’єднаємо клітинки A1:D1 та внесемо туди назву задачі: “Оптимізація плану перевезень цегли”.

2. В масив клітинок A3:B7 занесемо таблицю з інформацією про потужності цегельних заводів, причому для обчислення загальної виробничої потужності в клітинку B7 уведемо формулу: =СУММ(B4:B6). Ця таблиця матиме такий вигляд:

Завод	Потужність
3-1	18
3-2	24
3-3	28
Разом	70

3. В масив клітинок A9:G10 занесемо таблицю з інформацією про попит цегли на кожному з будівельних майданчиків. Для обчислення сукупного попиту у клітинку G10 уведемо формулу: =СУММ(B10:F10). Таблиця матиме вигляд:

Буд-майданчик	Б-1	Б-2	Б-3	Б-4	Б-5	Всього
Попит	8	10	12	15	20	65

4. В масив клітинок A12:F17 занесемо таблицю з інформацією про транспортні тарифи:

Транспортні тарифи					
Завод	Будівельний майданчик				
	Б-1	Б-2	Б-3	Б-4	Б-5
3-1	25	40	15	20	30
3-2	60	50	30	55	65
3-3	40	35	50	30	45

5. В клітинках A19:D19 передбачимо інформацію про загальні транспортні витрати. Щоб побудувати цю таблицю, клітинки A19:C19 об’єднаємо та впишемо слова: “Загальні транспортні витрати”, а клітинку D19 оберемо за цільову. Пізніше в цю клітинку потрібно буде ввести формулу для обчислення загальних транспортних витрат. Ось як виглядатимуть зараз клітинки A19:D19:

Загальні транспортні витрати	
------------------------------	--

6. Для таблиці з інформацією про план перевезень цегли оберемо масив клітинок A21:F26. Частина клітинок цього масиву міститиме необхідні написи, а для значень змінних, що безпосередньо означають обсяги відповідних перевезень, потрібен лише фрагмент B24:F26 – зараз ці клітинки порожні:

План перевезень цегли					
Завод	Будівельний майданчик				
	Б-1	Б-2	Б-3	Б-4	Б-5
3-1					
3-2					
3-3					

7. Уведемо в цільову клітинку D19 формулу для обчислення загальних транспортних витрат. Зараз зручно скористатися спеціальною функцією, яка дозволяє знаходити суму добутків відповідних елементів числових масивів – функцією СУММПРОИЗВ, а також врахувати, що транспортні тарифи містяться в масиві клітинок B15:F17, а обсяги перевезень міститимуться в масиві клітинок B24:F26. Отже, в клітинку D19 вводимо формулу:

=СУММПРОИЗВ(B15:F17;B24:F26)

8. Масив клітинок A28:B31 відведемо для інформації про обсяги вивезеної з заводів цегли. Для цього, крім необхідних надписів, уведемо:

у клітинку B19 – формулу: =СУММ(B24:F24)

у клітинку B20 – формулу: =СУММ(B25:F25)

у клітинку B21 – формулу: =СУММ(B26:F26)

/Бачимо, що для опрацювання клітинок B20 і B21 формулу з клітинки B19 потрібно просто “протягнути” на клітинки B20, B21./

Отримаємо поки що таке:

Завод	Вивезено
3-1	0
3-2	0
3-3	0

9. У масиві клітинок A33:F34 передбачимо інформацію про обсяги ввезень цегли на кожний з будівельних майданчиків:

Буд-майданчик	Б-1	Б-2	Б-3	Б-4	Б-5
Ввезено					

Для автоматичного заповнення цієї таблиці уведемо потрібні формули:

у клітинку B34: =СУММ(B24: B26)

у клітинку C34: =СУММ(C24: C26)

у клітинку D34: =СУММ(D24: D26)

у клітинку E34: =СУММ(E24: E26)

у клітинку F34: =СУММ(F24: F26)

/Можна “протягнути” формулу з клітинки B34 на клітинки C34, D34, E34 та F34./

Підготовку робочого аркушу закінчено. Він матиме такий вигляд, як це показано на рисунку 2.2.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Оптимізація плану перевезень цегли						
2							
3	Завод	Потужність					
4	3-1	18					
5	3-2	24					
6	3-3	28					
7	Разом:	70					
8							
9	Буд-майданчик	Б-1	Б-2	Б-3	Б-4	Б-5	Всього
10	Попит	8	10	12	15	20	65
11							
12	Транспортні тарифи						
13	Завод	Будівельний майданчик					
14		Б-1	Б-2	Б-3	Б-4	Б-5	
15	3-1	25	40	15	20	30	
16	3-2	60	50	30	55	65	
17	3-3	40	35	50	30	45	
18							
19	Загальні транспортні витрати			0			
20							
21	План перевезень цегли						
22	Завод	Будівельний майданчик					
23		Б-1	Б-2	Б-3	Б-4	Б-5	
24	3-1						
25	3-2						
26	3-3						
27							
28	Завод	Вивезено					
29	3-1	0					
30	3-2	0					
31	3-3	0					
32							
33	Буд-майданчик	Б-1	Б-2	Б-3	Б-4	Б-5	
34	Ввезено	0	0	0	0	0	

Рис. 2.2. Вид робочого листа, підготовленого для розв'язування задачі про оптимізацію плану перевезень цегли

Пошук розв'язку.

1. Оберемо команду **“Поиск решения”** в меню **“Сервис”**.
2. У діалоговому вікні **“Поиск решения”**, яке з'явиться на екрані, в полі **“Установить целевую ячейку”** вкажемо на адресу цільової клітинки: D19.
3. Перемикач вибору оптимізаційного спрямування цільової функції ввімкнемо у положення **“минимальному значению”**.
4. У полі **“Изменяя ячейки”** вкажемо на адреси клітинок з основними незалежними змінними, які відповідають шуканим обсягам перевезень цегли за кожним з маршрутів: B24:F26.
5. У поле **“Ограничения”** введемо обмеження задачі. Для цього натиснемо кнопку **“Добавить”** та введемо обмеження щодо виробничих потужностей заводів:

\$B\$29:\$B\$31	<=	\$B\$4:\$B\$6
-----------------	----	---------------

та щодо попиту на цеглу з боку будівельних майданчиків:

\$B\$34:\$F\$34	=	\$B\$10:\$F\$10
-----------------	---	-----------------

/Зараз ми скористалися можливістю використовувати в Excel відношення **“<=”** та **“=”** не лише щодо двох чисел, а також і щодо двох числових масивів однакової розмірності – у такому разі зазначене відношення мають задовольняти усі пари відповідних елементів вказаних у відношенні масивів./

6. Введемо **параметри** пошуку рішення: **“Линейная модель”** та **“Неотрицательные переменные”**.

7. Натиснемо на кнопку **“Выполнить”**.

8. У вікні **“Результаты поиска решения”**, яке через мить з'явиться на екрані, увімкнемо перемикач **“Сохранить найденное решение”** та натиснемо **ОК**.

9. Прочитаємо на робочому аркуші Excel знайдений розв'язок (рис. 2.3). Оптимальному плану перевезень відповідають мінімальні загальні транспортні витрати у розмірі 2215 гривень.

Розв'язок задачі знайдено.

	A	B	C	D	E	F	G
18							
19	Загальні транспортні витрати			2215			
20							
21	План перевезень цегли						
22	Завод	Будівельний майданчик					
23		Б-1	Б-2	Б-3	Б-4	Б-5	
24	З-1	8	0	0	0	10	
25	З-2	0	7	12	0	0	
26	З-3	0	3	0	15	10	
27							
28	Завод	Вивезено					
29	З-1	18					
30	З-2	19					
31	З-3	28					
32							
33	Буд-майданчик	Б-1	Б-2	Б-3	Б-4	Б-5	
34	Ввезено	8	10	12	15	20	

Рис. 2.3. Фрагмент робочого листа з розв'язком задачі про оптимізацію плану перевезень цегли

Задачу про оптимізацію плану перевезень цегли розв'язано.

2.4. Завдання для самостійного опрацювання

З п'яти цегельних заводів Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 та Z_5 цегла щоденно відвантажується на сім будівельних майданчиків $M_1, \dots, M_7$. Щодобові виробничі потужності заводів, щоденна потреба будівельників у цеглі та транспортні тарифи на перевезення однієї тисячі цеглин наведено в таблицях 2.2 – 2.4.

Таблиця 2.2

Виробничі потужності цегельних заводів, тис. цеглин на добу

Цегельний завод	З-1	З-2	З-3	З-4	З-5	Разом
Потужність	100	150	130	200	170	750

Таблиця 2.3

Щодобові потреби будівельних майданчиків, тис. цеглин

Майданчик	М-1	М-2	М-3	М-4	М-5	М-6	М-7	Разом
Попит	75	94	106	82	56	88	112	613

Таблиця 2.4

Транспортні тарифи, гривень з розрахунку на 1 тис. цеглин

Цегельний завод	Будівельний майданчик						
	М-1	М-2	М-3	М-4	М-5	М-6	М-7
3-1	12	35	26	28	46	12	32
3-2	24	14	21	24	40	11	36
3-3	29	16	25	28	35	15	31
3-4	30	32	29	26	42	13	39
3-5	18	19	30	27	44	10	30

Потрібно:

1. Визначити оптимальний за критерієм мінімізації загальних транспортних витрат план постачання цеглою будівельних майданчиків.

2. Чи є сенс змінити знайдений план постачання на інший, якщо додатково враховувати витрати на придбання цегли? Відомо, що заводські ціни на цеглу, з розрахунку на 1 тис. цеглин, наступні: Z_1 , Z_4 – по 500, Z_2 – 480, Z_3 , Z_5 – по 520 гривень.

3. Як зміняться закупівельна та транспортна складові оптимальних загальних витрат (дивись завдання 2), якщо на будівельному майданчику M_4 відмовляться від цегли, яку виготовляє завод Z_2 ?

З метою опрацювання наведених питань пропонуємо:

1). Скласти економіко–математичну модель транспортної задачі. Знайти оптимальний план перевезень на ПК.

2). Скласти економіко–математичну модель виробничо–транспортної задачі, обчислити на ПК оптимальний план закупівель та перевезення цегли за критерієм мінімізації загальних витрат на закупівлю та перевезення. Порівняти знайдений план перевезень з попереднім.

3). Ввести до умов виробничо–транспортної задачі заборону на перевезення за маршрутом $Z_2 \rightarrow M_4$. Знайти новий оптимальний план та порівняти результати з результатами розрахунків у п. 2.

4). Навести інші приклади аналогічних оптимізаційних задач у логістичній діяльності.

РОЗДІЛ 3. ОПТИМІЗАЦІЯ ПЛАНУ ПОСТАВОК ПРОДУКЦІЇ ДО СПОЖИВАЧІВ З УРАХУВАННЯМ ВІДПУСКНОЇ ЦІНИ НА ПРОДУКЦІЮ У РІЗНИХ ПОСТАЧАЛЬНИКІВ (ВИРОБНИЧО–ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА)

З виробничо–транспортною задачею, в якій план забезпечення продукцією споживачів визначається не лише транспортними тарифами, а також відпускними цінами на продукцію у різних споживачів, Ви познайомились, якщо уважно виконували завдання з попереднього розділу. Зараз ми зупинимось на питанні про виробничо–транспортну задачу докладніше.

- 3.1. Постановка виробничо–транспортної задачі
- 3.2. Економіко–математична модель та умова існування розв’язку задачі
- 3.3. Розв’язування задачі про оптимізацію плану поставок продукції до споживачів з урахуванням відпускної ціни на продукцію у різних постачальників за методом потенціалів шляхом зведення виробничо–транспортної задачі до транспортної
- 3.4. Розв’язування виробничо–транспортної задачі з використанням інструменту “Поиск решения” Excel
- 3.5. Завдання для самостійного опрацювання

3.1. Постановка виробничо–транспортної задачі

Виробничо–транспортна задача полягає у тому, щоб з якнайменшими загальними витратами забезпечити попит споживачів. Окрім інформації про розміри попиту до уваги беруться не лише транспортні тарифи на перевезення одиниці продукції від постачальників до споживачів і виробничі потужності постачальників, а також відпускні ціни на продукцію у кожного з постачальників.

Вихідна інформація до задачі:

m – кількість підприємств – виробників продукції (постачальників);

i – номер окремого постачальника ($i = \overline{1, m}$);

N_i – виробнича потужність i -го виробника;

s_i – відпускна ціна одиниці продукції у i -го постачальника;

n – кількість споживачів;

j – номер окремого споживача ($j = \overline{1, n}$);

b_j – попит на продукцію з боку j -го споживача;

c_{ij} – витрати на перевезення одиниці продукції за маршрутом $i \rightarrow j$ ($i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$).

Невідомі:

x_{ij} – обсяг перевезень за маршрутом $i \rightarrow j$ ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$);

y_i – обсяг виготовленої на i -му підприємстві та відправленої споживачам продукції ($i = \overline{1, m}$);

z – загальні витрати на закупівлю продукції у постачальників і перевезення цієї продукції до споживачів.

3.2. Економіко–математична модель та умова існування розв’язку задачі

Економіко–математична модель виробничо–транспортної задачі, з урахуванням обраних позначень для відомих і невідомих величин, набирає вигляду:

$$\left. \begin{aligned} z &= \sum_{i=1}^m s_i y_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &\geq b_j, \quad j = \overline{1, n} \\ 0 \leq y_i &= \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq N_i, \quad i = \overline{1, m} \\ x_{ij} &\geq 0, \quad i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Цільова функція задачі відбиває вимогу мінімізувати загальні витрати на закупівлю продукції та її перевезення до споживачів. Обмеження задачі враховують вимогу забезпечення попиту кожного із споживачів, умову про відповідність обсягів закупівлі рівням виробничих потужностей кожного із постачальників та балансові рівняння про розподіл виготовленої кожним із підприємств–постачальників продукції між споживачами. Враховуються також вимоги про невід’ємність обсягів виробництва та перевезень продукції.

Математично модель (3.1) являє собою задачу лінійного програмування транспортного типу. Її можна розв’язувати симплекс–методом. Можна також цю задачу звести до транспортної та розв’язувати за методом потенціалів. Але спочатку слід перевірити, чи виконується умова існування розв’язку цієї задачі.

Виробничо–транспортна задача (3.1) розв’язувана тоді і тільки тоді, коли загальні виробничі потужності усіх виробників відповідають сукупному попиту на продукцію з боку всіх споживачів:

$$\sum_{i=1}^m N_i \geq \sum_{j=1}^n b_j \quad (3.2)$$

В реальних ситуаціях у співвідношенні між обсягами загальних виробничих потужностей та сукупного попиту можуть мати місце такі три різних випадки:

1). Загальні виробничі потужності усіх виробників збігаються із сукупним попитом споживачів:

$$\sum_{i=1}^m N_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad (3.3)$$

Таку задачу будемо називати закритою. Закрита задача є розв'язуваною. Особливість закритої задачі полягає у тому, що обсяги виробництва продукції кожним із виробників збігатимуться з його виробничими потужностями. З іншого боку, кожному споживачу буде надіслано продукцію саме у кількості, яка збігається з його попитом.

2). Загальні виробничі потужності виробників перевищують сукупний попит усіх споживачів:

$$\sum_{i=1}^m N_i > \sum_{j=1}^n b_j \quad (3.4)$$

Така виробничо–транспортна задача теж є розв'язуваною. Причому оптимальний план не вимагатиме повного використання загального виробничого потенціалу виробників через економічну недоцільність надсилання споживачам продукції у обсягах, що перевищуватимуть їхній попит. Резерв виробничих потужностей складе величину:

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^m N_i - \sum_{j=1}^n b_j \quad (3.5)$$

Залучимо до розгляду фіктивного $(n+1)$ -го споживача з рівнем попиту b_{n+1} . Тоді задача перетвориться на закриту. Причому перевезення за фіктивними маршрутами – визначаються змінними $x_{i,n+1}$ – не вимагатимуть ані транспортних витрат, ані витрат на придбання цієї продукції. Вони показують резерв виробничих потужностей i -го підприємства ($i = \overline{1, m}$), що лишається через брак сукупного попиту на продукцію.

3). Загальні виробничі потужності усіх виробників менші від сукупного попиту споживачів:

$$\sum_{i=1}^m N_i < \sum_{j=1}^n b_j \quad (3.6)$$

Така виробничо–транспортна задача не є розв'язуваною через наявність дефіциту виробничих потужностей у кількості:

$$N_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m N_i \quad (3.7)$$

Зараз може виникнути нова задача: як оптимальним чином, нехай i з дефіцитом, максимально забезпечити потреби споживачів? Цю нову задачу можна звести до закритої введенням фіктивного $(m+1)$ -го виробника з виробничою потужністю N_{m+1} одиниць продукції. Виготовлена ним продукція та обсяги перевезень продукції від нього споживачам не вимагатимуть аніяких витрат, причому змінні $x_{m+1,j}$, $j = \overline{1, n}$, означатимуть

обсяги недопостачання продукції споживачам внаслідок дефіциту виробничих потужностей.

3.3. Розв'язування задачі про оптимізацію плану поставок продукції до споживачів з урахуванням відпускної ціни на продукцію у різних постачальників за методом потенціалів шляхом зведення виробничо–транспортної задачі до транспортної

Виробничо–транспортну задачу можна звести до класичної транспортної задачі. Для цього слід вилучити змінні y_i , використовуючи балансові рівняння:

$$y_i = \sum_{j=1}^n x_{ij}, \quad i = \overline{1, m} \quad (3.8)$$

Виконавши необхідні перетворення, отримаємо таку транспортну задачу:

$$\left. \begin{aligned} z &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (s_i + c_{ij}) x_{ij} \rightarrow \min \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &\geq b_j, \quad j = \overline{1, n} \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} &\leq N_i, \quad i = \overline{1, m} \\ x_{ij} &\geq 0, \quad i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n} \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Відмінність задачі (3.9) від класичної транспортної задачі полягає у тому, що коефіцієнти при змінних у цільовій функції задачі (3.9) відбивають не лише питомі витрати на перевезення продукції, а також і витрати, пов'язані із придбанням цієї продукції у відповідного виробника (постачальника).

Задачу (3.9) можна розв'язувати за методом потенціалів (звівши її, у разі необхідності, до закритої). Після цього оптимальні обсяги виробництва обчислюватимуться за даними про оптимальні обсяги перевезень за балансовими рівняннями (3.8).

Розглянемо конкретний числовий **приклад**. Припустимо, що задача характеризується наступними даними:

1). Інформація про виробників – постачальників продукції ($m = 4$):

i	1	2	3	4
N_i	120	160	180	230
s_i	6,0	5,5	5,0	4,8

2). Інформація про споживачів ($n = 3$):

j	1	2	3
b_j	140	200	350

3) Транспортні тарифи ($\|c_{ij}\|_{(m \times n)}$):

i	j		
	1	2	3
1	0,1	0,2	0,1
2	0,3	0,4	0,2
3	0,4	0,1	0,3
4	0,2	0,1	0,3

Наведена задача є закритою (загальні виробничі потужності усіх виробників збігаються із сукупним попитом споживачів; вони дорівнюють 690 одиниць продукції).

Обчислимо питомі виробничо–транспортні витрати (за формулою: $s_i + c_{ij}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$):

i	j		
	1	2	3
1	6,1	6,2	6,1
2	5,8	5,9	5,7
3	5,4	5,1	5,3
4	5,0	4,9	5,1

Тепер можна скористатися методом потенціалів.

1-й крок.

N_i	b_j			$\Sigma = 690$
	140	200	350	
120	6,1 110	6,0 6,2	6,1 10	0
160	5,7 5,8	5,6 5,9	5,7 160	-0.4
180	5,3 5,4	5,2 > *	5,1 5,3 180	-0.8
230	5,0 30	4,9 200	5,0 5,1	-1.1
$\Sigma = 690$	6.1	6.0	6.1	u_i
	v_j			

План не є оптимальним, оскільки за маршрутом $3 \rightarrow 2$ сума потенціалів $(-0,8 + 6,0 = 5,2$ – показана у верхньому лівому куті клітинки) перевищує тариф (5,1 – показаний у верхньому правому куті клітинки).

Корекцією поточного неоптимального опорного плану перевезень переходимо до другого кроку.

2-й крок.

N_i	b_j			$\Sigma = 690$
	140	200	350	
120	6,0 6,1	5,9 6,2	6,1	0
160	5,6 5,8	5,5 5,9	5,7	-0.4
180	5,2 5,4	5,1	5,3	-0.8
230	5,0	4,9	5,1	-1.0
$\Sigma = 690$	6.0	5.9	6.1	u_i
	v_j			

Ознака оптимальності виконується: за кожним із маршрутів сума потенціалів не перевищує відповідного тарифу. Фіксуємо знайдений план як оптимальний та обчислюємо загальні мінімально можливі виробничо–транспортні витрати:

$$z^* = 120 \cdot 6,1 + 160 \cdot 5,7 + 110 \cdot 5,1 + 70 \cdot 5,3 + 140 \cdot 5,0 + 90 \cdot 4,9 = 3717,0 \text{ (грош.од.)}$$

Задачу за методом потенціалів розв’язано.

3.4. Розв’язування виробничо–транспортної задачі з використанням інструменту “Поиск решения” Excel

Розпочнемо роботу зі створення файлу “VTZ.xls” та звернемося до першого аркушу цієї книги “Лист 1”.

Підготовка робочого аркуша Excel. Виконаємо такі дії.

1. Об’єднаємо клітинки A1:E1 та внесемо туди назву задачі: “Виробничо–транспортна задача”.

2. В масив клітинок A3:D3, які об’єднаємо, внесемо назву першого інформаційного блоку: “1). Інформація про виробників–постачальників”, під якою в масиві клітинок A4:C8 створимо таблицю з даними про потужності та відпускну ціну одиниці продукції у кожного з постачальників:

Номер	Потужність	Ціна за од.
1	120	6,0
2	160	5,5
3	180	5,0
4	230	4,8

3. Об’єднаємо клітинки A10:D10 та зафіксуємо у них назву другого інформаційного блоку: “2). Інформація про споживачів”. Далі в клітинках A11:D12 наведемо дані про попит кожного із споживачів:

Номер	1	2	3
Попит	140	200	350

4. В масив клітинок A14:D20 занесемо інформаційний блок про транспортні тарифи:

3). Транспортні тарифи			
Виробник	Споживач		
	1	2	3
1	0,1	0,2	0,1
2	0,3	0,4	0,2
3	0,4	0,1	0,3
4	0,2	0,1	0,3

5. В клітинках A22:E22 побудуємо інформаційний блок про загальні витрати на закупівлю продукції у виробників та її перевезення до постачальників. Для цього клітинки A22:D22 об'єднаємо та впишемо слова: “4). Загальні виробничо–транспортні витрати”, а клітинку E22 оберемо за цільову. Згодом в цю клітинку внесемо формулу для обчислення загальних виробничо–транспортних витрат.

6. Масив клітинок A24:B29 відведемо для п'ятого інформаційного блоку – про план виробництва (закупівлі) продукції у кожного з постачальників; масив клітинок A31:D33 – для шостого інформаційного блоку – про обсяги постачання продукції кожному із споживачів; нарешті, масив клітинок A35:D41 – для сьомого інформаційного блоку про план перевезень продукції. Ось як виглядатимуть зараз ці інформаційні блоки:

5). План виробництва	
Виробник	Обсяг
1	
2	
3	
4	

6). Обсяги постачання			
Споживач	1	2	3
Обсяг	140	200	350

7). План перевезень			
Виробник	Споживач		
	1	2	3
1			
2			
3			
4			

7. Уведемо в цільову клітинку E22 формулу для обчислення загальних виробничо–транспортних витрат:

=СУММПРОИЗВ(B26:B29;C5:C8)+СУММПРОИЗВ(B17:D20;B38:D41)

8. Внесемо формули обчислення необхідних обсягів виробництва продукції, яка надсилатиметься усім споживачам:

у клітинку B26 – формулу: =СУММ(B38:D38)

у клітинку B27 – формулу: =СУММ(B39:D39)

у клітинку B28 – формулу: =СУММ(B40:D40)

у клітинку B29 – формулу: =СУММ(B41:D41)

/Формулу з клітинки B26 потрібно просто “протягнути” через клітинки B27, B28 та B29./

9. У клітинки B33:D33 введемо формули для обчислення обсягів продукції, що ввозитиметься кожному споживачу:

у клітинку B34: =СУММ(B38:B41)

у клітинку C34: =СУММ(C38: C41)

у клітинку D34: =СУММ(D38: D41)

/Можна “протягнути” формулу з клітинки B34 на клітинки C34 та D34./ Підготовку робочого аркушу закінчено.

Пошук розв’язку.

1. Оберемо команду “Поиск решения” в меню “Сервис”.

2. У діалоговому вікні “Поиск решения”, яке з’явиться на екрані, в полі “Установить целевую ячейку” вкажемо на адресу цільової клітинки: E22.

3. Перемикач вибору оптимізаційного спрямування цільової функції увімкнемо у положення “минимальному значению”.

4. У полі “Изменяя ячейки” вкажемо на адреси клітинок з основними незалежними змінними, які відповідають шуканим обсягам перевезень продукції за кожним з маршрутів: B38:D41.

5. У поле “Ограничения” введемо обмеження задачі. Для цього натиснемо кнопку “Добавить” та введемо обмеження щодо виробничих потужностей постачальників:

\$B\$26:\$B\$29	<=	\$B\$5:\$B\$8
-----------------	----	---------------

та щодо попиту на продукцію з боку споживачів:

\$B\$33:\$D\$33	>=	\$B\$12:\$D\$12
-----------------	----	-----------------

6. Введемо параметри пошуку рішення: “Линейная модель” та “Неотрицательные переменные”.

7. Натиснемо на кнопку “Выполнить”.

8. У вікні “Результаты поиска решения”, яке через мить з’явиться на екрані, увімкнемо перемикач “Сохранить найденное решение” та натиснемо ОК.

9. Прочитаємо на робочому аркуші Excel знайдений розв’язок (рис. 3.1). Оптимальному плану закупівлі та перевезень продукції відповідають загальні витрати у сумі 3717 грошових одиниць.

	A	B	C	D	E
1	Виробничо–транспортна задача				
2					
3	1). Інформація про виробників–постачальників				
4	Номер	Потужність	Ціна за од.		
5	1	120	6,0		
6	2	160	5,5		
7	3	180	5,0		
8	4	230	4,8		
9					
10	2). Інформація про споживачів				
11	Номер	1	2	3	
12	Попит	140	200	350	
13					
14	4). Транспортні тарифи				
15	Виробник	Споживач			
16		1	2	3	
17	1	0,1	0,2	0,1	
18	2	0,3	0,4	0,2	
19	3	0,4	0,1	0,3	
20	4	0,2	0,1	0,3	
21					
22	5). Загальні виробничо–транспортні витрати				3717
23					
24	6). План виробництва				
25	Виробник	Обсяг			
26	1	120			
27	2	160			
28	3	180			
29	4	230			
30					
31	7). Обсяги постачання				
32	Споживач	1	2	3	
33	Обсяг	140	200	350	
34					
35	8). План перевезень				
36	Виробник	Споживач			
37		1	2	3	
38	1	0	0	120	
39	2	0	0	160	
40	3	0	180	0	
41	4	140	20	70	

Рис. 3.1. Робочий лист з умовами та розв’язком задачі про оптимізацію плану закупівлі та перевезень продукції до споживачів

3.5. Завдання для самостійного опрацювання

1. Проаналізуйте знайдений за методом потенціалів розв'язок задачі про оптимізацію плану закупівлі та перевезень продукції до споживачів (підрозділ 3.3) щодо існування альтернативних оптимальних планів та спробуйте описати всю множину оптимальних планів.

2. Порівняти розв'язки задачі, отримані за методом потенціалів (підрозділ 3.3) та на ПК (підрозділ 3.4).

3. Як змінитися розв'язок задачі про оптимізацію плану закупівлі та перевезень продукції до споживачів, якщо третій виробник збільшить відпускні ціни на продукцію на 30 %, а за маршрутами $3 \rightarrow 2$ та $4 \rightarrow 2$ буде введено заборону на перевезення продукції?

РОЗДІЛ 4. ОПТИМІЗАЦІЯ ПЛАНУ РОЗПОДІЛУ ЗАМОВЛЕНЬ НА ПЕРЕВЕЗЕННЯ МІЖ ПЕРЕВІЗНИКАМИ (ЗАДАЧА ПРО ПРИЗНАЧЕННЯ)

- 4.1. Постановка та особливості задачі про призначення; використання логічних змінних з метою відбиття її умов
- 4.2. Оптимізація плану розподілу замовлень на перевезення за критерієм мінімізації загальних витрат
- 4.3. Оптимізація плану розподілу замовлень на перевезення за критерієм мінімізації часу виконання всіх робіт
- 4.4. Завдання для самостійного опрацювання

4.1. Постановка та особливості задачі про призначення; використання логічних змінних з метою відбиття її умов

Задача про призначення у контексті логістики може полягати у визначенні якнайкращого плану розподілу замовлень на перевезення між різними виконавцями (перевізниками).

Особливість задачі полягає у тому, що коли кількість замовлень дорівнює m , кількість виконавців – теж m , причому кожному виконавцю слід доручити одне і тільки одне замовлення, загальна кількість альтернативних планів розподілу замовлень між виконавцями є дуже великою ($m! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m$). Наприклад, вже при $m = 10$ матимемо $10! = 3628800$ різних планів призначень, попарно порівняти які між собою без використання спеціальних засобів практично неможливо.

Отже, для вибору оптимального плану призначень є сенс скористатися спеціальними економіко–математичними методами моделювання та оптимізації.

Позначимо кількість замовлень на перевезення через m , а кількість можливих перевізників через n . Нехай i – номер окремого замовлення ($i = \overline{1, m}$), а j – номер окремого перевізника ($j = \overline{1, n}$).

Уведемо логічні змінні x_{ij} , які значеннями 1 або 0 відбиватимуть факт доручення або відмови від доручення i -го замовлення j -му перевізнку ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$):

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i\text{-те замовлення буде доручено } j\text{-му перевізнку} \\ 0, & \text{у супротивному випадку} \end{cases}$$

Тоді кількість перевізників, яким буде доручено виконати i -те замовлення, дорівнюватиме сумі:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in}, \quad i = \overline{1, m} \quad (4.1)$$

а кількість замовлень, які доручатимуться окремому j -му виконавцю, – сумі:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = x_{1j} + x_{2j} + \dots + x_{mj}, \quad j = \overline{1, n} \quad (4.2)$$

У випадку, коли кількість замовлень на перевезення збігається з кількістю виконавців ($m = n$), причому потрібно виконати всі замовлення за умов, що кожному перевізнику доручатиметься одне й тільки одне замовлення, довільний допустимий план $X = \|x_{ij}\|_{(m \times m)}$ розподілу замовлень між виконавцями має задовольняти обмеження:

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, m} \quad (4.3)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, m} \quad (4.4)$$

$$x_{ij} \in \{0; 1\}, \quad i, j = \overline{1, m} \quad (4.5)$$

Наведені формули означають:

(4.3) – кожне замовлення слід доручити одному і тільки одному перевізнику;

(4.4) – кожному перевізнику слід доручити одне і тільки одне замовлення;

(4.5) – кожна із логічних змінних, за її визначенням, може набирати лише одне із двох значень: або 1, або 0.

Припустимо, що кожний з виконавців виконує замовлення на перевезення за індивідуальними (власними) тарифами. Нехай c_{ij} – вартість виконання i -го замовлення j -м перевізником, причому матриця тарифів $C = \|c_{ij}\|_{(m \times m)}$ є відомою. Тоді можна обчислити загальні витрати z , пов'язані із реалізацією плану X розподілу замовлень між перевізниками:

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} \quad (4.6)$$

Задачі оптимізації плану розподілу замовлень між перевізниками за критерієм мінімізації загальної вартості виконання усіх перевезень зустрічаються у логістичній діяльності досить часто.

Припустимо далі, що є інформація про можливу тривалість виконання кожного з замовлень кожним з потенційних перевізників, тобто що відома матриця тривалостей $T = \|t_{ij}\|_{(m \times m)}$.

Якщо всі перевезення розпочинаються одночасно, може виникнути потреба у визначенні моменту часу, коли ці перевезення буде виконано. Цей момент часу v визначається подією закінчення найтривалішого з перевезень. Отже, якщо маємо допустимий план призначень X , тривалість v його виконання обчислюватиметься за формулою:

$$v = \max_{i, j = \overline{1, m}} \{t_{ij} x_{ij}\} \quad (4.7)$$

/Нагадаємо, що Excel у переліку вбудованих стандартних статистичних функцій має спеціальну функцію “МАКС” для обчислення максимуму з елементів масиву./

Критерій мінімізації тривалості виконання усіх перевезень теж може зустрічатися у задачах оптимізації логістичних рішень.

4.2. Оптимізація плану розподілу замовлень на перевезення за критерієм мінімізації загальних витрат

Математичний аналіз задачі. Економіко–математична модель задачі про оптимізацію плану розподілу замовлень на перевезення між перевізниками за критерієм мінімізації загальних витрат, з урахуванням формул (4.3) – (4.6), має вигляд:

$$\left. \begin{aligned} z &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \\ \sum_{j=1}^m x_{ij} &= 1, \quad i = \overline{1, m} \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &= 1, \quad j = \overline{1, m} \\ x_{ij} &\geq 0, \quad i, j = \overline{1, m} \\ x_{ij} &\leq 1, \quad i, j = \overline{1, m} \\ x_{ij} &- \text{цілі}, \quad i, j = \overline{1, m} \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

Цільова функція моделі відбиває вимогу знаходження плану розподілу замовлень між перевізниками із якнайменшою загальною вартістю. Перша група основних обмежень відтворює вимоги про те, щоб кожне з замовлень було доручено точно одному з виконавців. Друга група основних обмежень – вимоги про те, щоб кожному з виконавців було доручено виконання точно одного замовлення. Нарешті, допоміжними обмеженнями відбито особливість основних змінних задачі – те, що вони є логічними і можуть набувати лише значень із множини $\{0, 1\}$.

Математично наведена модель являє собою задачу цілочислового лінійного програмування транспортного типу з логічними змінними. Її схожість до класичної закритої транспортної задачі наводить на думку про можливість застосування для пошуку розв’язку методу потенціалів.

Проаналізуємо, чим саме відрізняється математична модель задачі про призначення від математичної моделі закритої транспортної задачі.

Помічаємо, що відмінностей є дві. По-перше, наявні обмеження зверху на значення кожної із основних змінних: $x_{ij} \leq 1, \quad i, j = \overline{1, m}$.

Якщо врахувати вимоги невід’ємності цих змінних, а також наявні основні обмеження стосовно сум певних груп таких змінних (кожна з сум має дорівнювати 1), доходимо висновку, що зазначені обмеження зверху на

значення кожної із основних змінних у задачі про призначення є надлишковими, тобто їх можна відкинути.

Друга відмінність полягає у тому, що на кожну із змінних x_{ij} накладено вимогу цілочисловості. У загальному випадку такі обмеження відкидати не можна, оскільки без них план може містити нецілочислові компоненти. Але в нашому випадку ситуація особлива. Річ у тім, що в системі основних обмежень задачі про призначення (вона тотожна системі основних обмежень закритої транспортної задачі) усі вільні коефіцієнти кожного з основних обмежень – цілі числа (дорівнюють +1). Відомо, що довільний опорний план закритої транспортної задачі із цілочисловими вільними коефіцієнтами системи основних обмежень задовольняє вимогу цілочисловості. Отже, якщо задачу про призначення розглядати як транспортну та застосувати до неї метод потенціалів, тоді знайдений за цим методом оптимальний опорний план автоматично задовольнятиме вимогу цілочисловості, тобто визначатиме оптимальний план розподілу замовлень між перевізниками.

Приклад розв’язування задачі за методом потенціалів. Припустимо, що задача про призначення має розмірність $m = 3$ та тарифи, що наведені у таблиці 4.1.

Таблиця 4.1

Тарифи на виконання замовлень різними перевізниками,
грошових одиниць

Замовлення	Перевізнак		
	П-1	П-2	П-3
3-1	15	9	16
3-2	11	14	20
3-3	16	12	21

Процес пошуку оптимального плану розподілу замовлень між перевізниками за методом потенціалів полягає у такому.

1-й крок. Знайдемо за методом якнайменшого тарифу план розподілу замовлень між перевізниками:

$$3-1 \rightarrow \text{П-2}, 3-2 \rightarrow \text{П-1}, 3-3 \rightarrow \text{П-3}$$

та проаналізуємо його на оптимальність, порівнюючи суму потенціалів з тарифами за небазисними “маршрутами”.

9	15	9	18 > 16	0
		1		
	11	11	14	20
1				0
				2
12	16	12	21	
		0	1	3
9		9	18	Потен- ціали

Наведений план не є оптимальним. Його можна покращити шляхом перерозподілу замовлень між перевізниками:

З-1 → П-3 (замість З-1 → П-2),

З-2 → П-1 (без змін),

З-3 → П-2 (замість З-3 → П-3).

2-й крок. Опрацюємо таблицю, що відповідає новому плану розподілу замовлень:

7	15	7	9	16	0
				1	
	11	11	14	20	
1				0	4
12	16	12	21		
		1	0	5	
7		7	16	Потен- ціали	

Бачимо, що сума потенціалів за кожним з “маршрутів” не перевищує тарифу. Отже, знайдений план розподілу наявних замовлень між перевізниками є оптимальним:

З-1 → П-3, З-2 → П-1, З-3 → П-2 .

Загальна вартість виконання робіт за цим планом складає 39 грошових одиниць і є найменшою у порівнянні з усіма іншими допустимими планами

розподілу. /Скажімо, попередній план, знайдений за методом мінімального тарифу, вимагав для реалізації 41 грошову одиницю./

Задачу про оптимізацію плану розподілу замовлень на перевезення між перевізниками розв'язано.

Розв'язування задачі на ПК. Розпочнемо роботу зі створення файлу “Prizn-1.xls”, у якому працюватимемо на першому аркуші “**Лист 1**”.

1. Об'єднаємо клітинки A1:D3 та внесемо туди назву задачі: “Оптимізація плану розподілу замовлень на перевезення за критерієм мінімізації витрат”.

2. Масив клітинок A5:D10 відведемо для інформаційного блоку про індивідуальні тарифи перевізників на виконання кожного з замовлень – таблицю 4.1. У тому числі для числових значень скористаємося клітинками B8:D10.

3. В клітинках A12: D12 побудуємо інформаційний блок про загальні витрати на виконання перевезень згідно плану розподілу замовлень, який ми визначаємо. Для цього об'єднаємо клітинки A12:C12 для слів: “Загальні витрати”, а клітинку D12 оберемо за цільову. Згодом в цю клітинку слід буде ввести формулу для обчислення загальних витрат.

4. Масив клітинок A14: D19 відведемо для інформаційного блоку про план розподілу замовлень; у тому числі для значень логічних змінних відведемо клітинки B17:D19.

5. Уведемо в цільову клітинку D12 формулу для обчислення загальних витрат:

=СУММПРОИЗВ(B8:D10; B17:D19)

6. У клітинки E17:E19 введемо формули для обчислення кількості перевізників, яким буде доручено виконання відповідного замовлення:

у клітинку E17 – формулу: =СУММ(B17:D17)

у клітинку E18 – формулу: =СУММ(B18:D18)

у клітинку E19 – формулу: =СУММ(B19:D19)

/Формулу з клітинки E17 “протягуємо” через клітинки E18 та E19./

7. У клітинки B20:D20 введемо формули для обчислення кількості замовлень, які доручатимуться кожному перевізнику:

у клітинку B20: =СУММ(B17:B19)

у клітинку C20: =СУММ(C17:C19)

у клітинку D20: =СУММ(D17:D19)

/Можна “протягнути” формулу з клітинки B20 на клітинки C20 та D20./

8. Показники, що обчислюватимуться в клітинках E17:E19 та B20:D20, є допоміжними, щоб підкреслити це, в клітинки E16 та A20 впишемо слово: “Сума”.

Підготовку робочого аркушу закінчено. Далі діятимемо для знаходження розв'язку задачі.

9. Оберемо команду “Поиск решения” в меню “Сервис”.

10. В полі “Установить целевую ячейку” діалогового вікна “Поиск решения” вкажемо на адресу цільової клітинки: D12.

11. Перемикач вибору оптимізаційного спрямування цільової функції увімкнемо у положення “**минимальному значению**”.

12. У полі “**Изменяя ячейки**” вкажемо на адреси клітинок з основними незалежними змінними: B17:D19.

13. У поле “**Ограничения**” введемо обмеження задачі. Для цього натиснемо кнопку “**Добавить**” та введемо обмеження щодо кількості замовлень, які доручатимуться кожному перевізнику:]

\$B\$20:\$D\$20	=	1
-----------------	---	---

та щодо кількості перевізників, яким буде доручено виконання кожного замовлення:

\$E\$17:\$E\$19	=	1
-----------------	---	---

14. Спробуємо скористатися властивістю методу потенціалів щодо цілочисловості усіх компонентів довільного опорного плану. Тому не вказуватимемо в обмеженнях, що основні змінні мають набирати лише значень 0 або 1 за допомогою оператору “**двоич**”, а введемо **параметри** пошуку рішення: “**Линейная модель**” та “**Неотрицательные переменные**”.

15. Натиснемо на кнопку “**Выполнить**”.

16. У вікні “**Результаты поиска решения**”, яке з’явиться на екрані, натиснемо **ОК**.

17. Прочитаємо на робочому аркуші Excel знайдений розв’язок (рис. 4.1). Найекономічнішому плану розподілу замовлень на перевезення між різними перевізниками відповідають загальні витрати у сумі 39 грошових одиниць.

	А	В	С	Д	Е
1	Оптимізація плану розподілу замовлень на перевезення за критерієм мінімізації витрат				
2					
3					
4					
5	Тарифи на виконання замовлень				
6	Замовлення	Перевізник			
7		П-1	П-2	П-3	
8	3-1	15	9	16	
9	3-2	11	14	20	
10	3-3	16	12	21	
11					
12	Загальні витрати			39	
13					
14	План розподілу замовлень				
15	Замовлення	Перевізник			
16		П-1	П-2	П-3	Сума
17	3-1	0	0	1	1
19	3-2	1	0	0	1
19	3-3	0	1	0	1
20	Сума	1	1	1	

Рис. 4.1. Робочий лист книги “Prizn-1” з результатами розв’язування задачі про оптимізацію плану розподілу замовлень на перевезення за критерієм мінімізації загальних витрат

4.3. Оптимізація плану розподілу замовлень на перевезення за критерієм мінімізації часу виконання всіх робіт

Математична постановка задачі. Якщо усі перевезення розпочинаються одночасно, може виникнути задача формування такого плану розподілу завдань між перевізниками, щоб загальний час на виконання усіх перевезень був якнайменшим. Цей час визначається найтривалішим з перевезень та обчислюється за формулою (4.7).

Економіко–математична модель задачі про оптимізацію плану розподілу m замовлень на перевезення між m перевізниками за критерієм мінімізації часу ν виконання всіх робіт, у свою чергу, записується так:

$$\left. \begin{aligned} v &= \max_{i,j=1, \overline{m}} t_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \\ \sum_{j=1}^m x_{ij} &= 1, \quad i = \overline{1, m} \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &= 1, \quad j = \overline{1, m} \\ x_{ij} &\in \{0; 1\}, \quad i, j = \overline{1, m} \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

де t_{ij} – можлива тривалість виконання i -го перевезення j -м виконавцем ($i, j = \overline{1, m}$).

Перша група основних обмежень відтворює вимоги про те, щоб кожне з замовлень було доручено точно одному з виконавців. Друга група – про те, щоб кожному з виконавців було доручено точно одне замовлення. Нарешті, останніми обмеженнями відбито те, що основні змінні задачі є логічними та можуть набувати лише значення з множини $\{0, 1\}$.

Формально задачу (4.9) вважати задачею лінійного програмування не можна, оскільки її цільова функція містить операцію обчислення максимуму із множини $\{t_{ij} x_{ij} \mid i, j = \overline{1, m}\}$. Проте її можна звести до задач лінійного типу (зрозуміло, що логічні змінні залишаться), якщо позбутися функції обчислення максимуму. Це перетворення можна зробити у такий спосіб:

$$\left. \begin{aligned} v &\rightarrow \min \\ t_{ij} x_{ij} &\leq v, \quad i, j = \overline{1, m} \\ \sum_{j=1}^m x_{ij} &= 1, \quad i = \overline{1, m} \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &= 1, \quad j = \overline{1, m} \\ x_{ij} &\in \{0; 1\}, \quad i, j = \overline{1, m} \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

Від вибору математичної моделі – (4.9) або (4.10) – залежатиме, чи потрібно вводити у параметри пошуку рішення при розв’язування задачі на комп’ютері параметр “**Линейная модель**”, чи ні.

Числовий приклад. Припустимо, що 4 перевезення, які слід розпочати одночасно, потрібно розподілити між 4 перевізниками. Тривалості можливого виконання кожним із перевізників кожного завдання відомі та наведені у таблиці 4.2.

Очікувана тривалість виконання замовлень на перевезення
різними виконавцями, годин

Замовлення	Перевізник			
	П-1	П-2	П-3	П-4
3-1	8	10	7	12
3-2	9	6	15	8
3-3	11	15	14	12
3-4	3	7	6	8

Необхідно знайти такий план розподілу замовлень між перевізниками, щоб тривалість часу до моменту закінчення усіх перевезень була б якнайменшою.

Розв’язування задачі на ПК. Для визначеності вважатимемо, що використовується економіко–математична модель задачі, записана у формі (4.9). Створимо файл “Prizn-2.xls” та працюватимемо на аркуші “Лист 1”.

1. У клітинки A1:E3, які об’єднаємо, внесемо назву задачі: “Оптимізація плану розподілу замовлень на перевезення за критерієм мінімізації часу виконання всіх робіт”.

2. Масив клітинок A5:E10 відведемо для інформаційного блоку про можливі тривалості виконання кожного з завдань кожним з перевізників – таблицю 4.2. У тому числі для числових значень відведемо клітинки B8:E11.

3. В клітинках A13: E13 побудуємо інформаційний блок про планову тривалість виконання перевезень згідно плану розподілу замовлень. Для цього об’єднаємо клітинки A13:D13 та впишемо слова: “Час закінчення усіх перевезень”, а клітинку E13 оберемо за цільову, в яку згодом ми введемо формулу для обчислення необхідних витрат часу.

4. Масив клітинок A15: E21 відведемо для блоку інформації про план розподілу замовлень; у тому числі для значень логічних змінних відведемо клітинки B18:E21.

5. У клітинки F18:F21 введемо формули для обчислення кількості перевізників, яким буде доручено виконання відповідного замовлення:

у клітинку F18: =СУММ(B18:E18)

у клітинку F19: =СУММ(B19:E19)

у клітинку F20: =СУММ(B20:E20)

у клітинку F21: =СУММ(B21:E21)

6. У клітинки B22:E22 введемо формули для обчислення кількості замовлень, які доручатимуться кожному перевізнику:

у клітинку B22: =СУММ(B18:B21)

у клітинку C22: =СУММ(C18:C21)

у клітинку D22: =СУММ(D18:D21)

у клітинку E22: =СУММ(E18:E21)

7. Показники, що обчислюватимуться в клітинках F18:E21 та B22:E22, є допоміжними; щоб позначити це, в клітинки F17 та A22 впишемо слово: "Сума".

8. У клітинках A24:E30 створимо допоміжний інформаційний блок для значень тривалостей окремих перевезень згідно плану розподілу завдань, у якому в клітинку B27 внесемо формулу: =C9*C19. "Протягнемо" потім цю формулу через клітинки B28:B30, далі – через клітинки C27:E30.

9. В цільову клітинку E13 занесемо формулу для обчислення часу закінчення усіх перевезень:

=МАКС(C27:F30)

Підготовку робочого аркушу закінчено.

10. Оберемо команду "**Поиск решения**" в меню "**Сервис**".

11. В полі "**Установить целевую ячейку**" діалогового вікна "**Поиск решения**" вкажемо на адресу E13.

12. Перемикач вибору оптимізаційного спрямування цільової функції увімкнемо у положення "**минимальному значению**".

13. У полі "**Изменяя ячейки**" вкажемо на адреси клітинок з основними незалежними змінними: B18:E21.

14. У поле "**Ограничения**" введемо обмеження задачі. Для цього натиснемо кнопку "**Добавить**" та введемо обмеження:

а) щодо кількості замовлень, які доручатимуться кожному перевізнику:

\$B\$22:\$E\$22	=	1
-----------------	---	---

б) щодо кількості перевізників, яким буде доручено виконання кожного замовлення:

\$F\$18:\$F\$21	=	1
-----------------	---	---

в) щодо умов цілочисловості усіх логічних змінних:

\$B\$18:\$E\$21	цел	=целое
-----------------	-----	--------

/Далі ми введемо параметр невід'ємності змінних. Тому, враховуючи обмеження у п.п. 14а та 14б, вимоги цілочисловості достатньо, щоб відповідні змінні набували лише значень 1 або 0. Альтернативним варіантом є використання у цих обмеженнях оператору "двоич"./

15. Введемо параметр пошуку рішення: "**Неотрицательные переменные**".

16. Натиснемо на кнопку "**Выполнить**".

17. Зафіксуємо результати, натиснувши на клавішу **ОК** у вікні "**Результаты поиска решения**".

Розв'язок задачі пошуку плану розподілу завдань між перевізниками за критерієм мінімізації часу завершення усіх перевезень показано на рисунку 4.2. Мінімально можлива тривалість виконання усіх перевезень становить 11 годин, що засвідчує значення у цільовій клітинці E13. Задачу розв'язано.

	A	B	C	D	E	F
1	Оптимізація плану розподілу замовлень на перевезення за критерієм мінімізації часу виконання всіх робіт					
2						
3						
4						
5	Тривалість виконання перевезень					
6	Замовлення	Перевізник				
7		П-1	П-2	П-3	П-4	
8	3-1	8	10	7	12	
9	3-2	9	6	15	8	
10	3-3	11	15	14	12	
11	3-4	3	7	6	8	
12						
13	Час закінчення усіх перевезень				11	
14						
15	План розподілу завдань на перевезення					
16	Замовлення	Перевізник				
17		П-1	П-2	П-3	П-4	Сума
18	3-1	0	0	1	0	1
19	3-2	0	0	0	1	1
20	3-3	1	0	0	0	1
21	3-4	0	1	0	0	1
22	Сума	1	1	1	1	
23						
24	Тривалості перевезень згідно плану розподілу завдань					
25	Замовлення	Перевізник				
26		П-1	П-2	П-3	П-4	
27	3-1	0	0	7	0	
28	3-2	0	0	0	8	
29	3-3	11	0	0	0	
30	3-4	0	7	0	0	
31						

Рис. 4.2. Робочий лист книги “Prizm-1” з результатами розв’язування задачі про оптимізацію плану розподілу замовлень на перевезення за критерієм мінімізації часу виконання всіх робіт

При розв'язуванні нелінійних задач або задач з цілочисловими чи логічними змінними потрібно уважно проаналізувати отримані результати, оскільки інколи замість точного розв'язку на екран спочатку виводиться лише наближений розв'язок, який може істотно відрізнятися від точного. Наприклад, мій комп'ютер кілька разів зупинявся на плані розподілу

замовлень $X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, який вимагає для виконання 12 годин, що на

9,09% більше, аніж при оптимальному плані. Зараз, щоб переконатися, що оптимальний план розподілу замовлень на перевезення вимагає 11 годин, досить звернути увагу, що третє замовлення (3-3) потребує для свого виконання щонайменше 11 годин (за умови його призначення першому перевізнику П-1), тому виконати всі замовлення за час, менший від 11 годин, неможливо.

В загальному випадку щоб упевнитись у правильності розв'язку, окрім аналітичних досліджень буває корисним запустити інструмент **“Поиск решения”** декілька разів, починаючи щоразу з іншої “стартової” точки.

4.4. Завдання для самостійного опрацювання

1. Знайти найекономічніший план розподілу п'яти запитів на перевезення між виконавцями за відомими тарифами перевізників на виконання кожного з перевезень (таблиця 4.3). Врахувати вимогу задіяти для перевезень усіх перевізників.

Таблиця 4.3

Тарифи на виконання замовлень різними перевізниками, гривень

Замовлення	Перевізнак				
	П-1	П-2	П-3	П-4	П-5
3-1	220	127	315	260	231
3-2	450	218	346	290	337
3-3	361	207	549	264	458
3-4	183	225	209	311	244
3-5	215	269	365	344	381

2. Припустимо, що в задачі про призначення кількість запитів на перевезення (m) не збігається з кількістю виконавців (n), причому $m < n$. Усі перевезення потрібно виконати, залучивши саме m перевізників та доручаючи кожному з залучених перевізників точно по одному завданню.

Решта $n - m$ виконавців до виконання робіт не залучатимуться. Побудувати економіко–математичну модель задачі, щоб визначити, кого саме із перевізників слід залучити.

3. Припустимо, що в задачі про призначення кількість запитів на перевезення є більшою від кількості виконавців: $m > n$. Побудувати економіко–математичну модель задачі для випадку, коли окремим виконавцям можна доручати виконання кількох перевезень?

4. Який з планів розподілу завдань на перевезення вимагатиме найменше часу для виконання, якщо перевізники розпочнуть усі перевезення одночасно? /Інформація про очікувану тривалість виконання кожним із перевізників кожного завдання наведена у таблиці 4.4./

Таблиця 4.4

Очікувана тривалість виконання замовлень на перевезення
різними виконавцями, годин

Замовлення	Перевізник					
	П-1	П-2	П-3	П-4	П-6	П-6
3-1	21	19	15	18	16	25
3-2	32	36	30	24	29	18
3-3	27	32	30	29	36	37
3-4	14	16	17	13	16	19
3-5	22	29	24	26	28	21
3-6	30	38	32	34	36	33

5. Наведіть власні приклади можливого застосування задачі про призначення в логістичній діяльності.

РОЗДІЛ 5. ОПТИМІЗАЦІЯ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНУ ВИРОБНИЦТВА, ЗБЕРІГАННЯ ТА ПОСТАВОК ПРОДУКЦІЇ

- 5.1. Постановка та економіко–математична модель задачі
- 5.2. Приклад розв’язування задачі на ПК
- 5.3. Завдання для самостійного опрацювання

5.1. Постановка та економіко–математична модель задачі

Для виконання календарних замовлень на постачання продукції фірмі потрібно визначити обсяги виробництва, враховуючи її щодобові виробничі потужності. Виготовлену впродовж робочого дня продукцію фірма може або надіслати споживачам, або залишити зберігати на власному складі до відправки споживачам, залежно від календарного плану замовлень на продукцію. У разі, якщо своєчасне виконання деякого замовлення у повному обсязі неможливе, частину продукції фірма може надіслати споживачу пізніше; але у такому разі вона несе певні збитки у зв’язку із затримкою. Потрібно знайти такий календарний план виробництва, зберігання та поставок продукції, щоб загальні витрати на виробництво та зберігання продукції, а також втрати внаслідок затримок із надсиланням продукції замовникам були якнайменшими.

Вихідною інформацією до задачі слугує така:

T – тривалість планового періоду (в днях);

i, j – номер окремого календарного дня планового періоду ($i, j = \overline{1, T}$);

N_i – виробнича потужність фірми для i -го дня планового періоду;

s_i – очікувана собівартість виробництва одиниці продукції для i -го дня планового періоду;

b_j – розмір замовлення на продукцію фірми на j -й день планового періоду.

Попит на певний день планового періоду фірма може задовольнити за рахунок:

1) або виробництва продукції у той же день та негайної поставки її замовнику – тоді фірма несе лише виробничі витрати;

2) або запасів виготовленої у попередні дні та не реалізованої раніше продукції – тоді на додаток до виробничих фірма несе витрати за зберігання продукції;

3) або ж виробництва та надсилання продукції замовнику із запізненням – тоді крім виробничих витрат фірма несе додаткові збитки за несвоєчасні поставки продукції.

Якщо продукція виготовляється завчасно та зберігається на фірмі, витрати за зберігання з розрахунку на одиницю продукцію складають g грошових одиниць за кожний день зберігання. З іншого боку, за кожен

одиницю несвоєчасно поставленої продукції фірма несе додаткові збитки у розмірі h грошових одиниць за кожний день затримки.

Задачу, що розглядається, математично можна описати моделлю класичної транспортної задачі. Для цього уведемо такі невідомі:

x_{ij} – обсяг виробництва продукції в i -й день планового періоду, призначеної для виконання замовлення, яке було сформоване на j -й день ($i, j = \overline{1, T}$);

z – загальні витрати на виробництво і зберігання продукції та втрати внаслідок затримок із виконанням замовлень.

Обчислимо необхідні розрахункові величини (у транспортній задачі вони відіграють роль транспортних тарифів):

$$c_{ij} = \begin{cases} s_i, & \text{якщо } i = j \text{ (враховується лише собівартість виробництва в } i\text{-й день)} \\ s_i + g \cdot (j - i), & \text{якщо } i < j \text{ (враховується собівартість виробництва в } i\text{-й день та вартість зберігання за час від } i \text{ до } j) \\ s_i + h \cdot (i - j), & \text{якщо } i > j \text{ (враховується собівартість виробництва в } i\text{-й день та втрати за затримку на час від } j \text{ до } i) \end{cases}$$

Тепер маємо можливість записати математичну модель нашої задачі:

$$\left. \begin{aligned} z &= \sum_{i=1}^T \sum_{j=1}^T c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \\ \sum_{j=1}^T x_{ij} &\leq N_i, \quad i = \overline{1, T} \\ \sum_{i=1}^T x_{ij} &= b_j, \quad j = \overline{1, T} \\ x_{ij} &\geq 0, \quad i, j = \overline{1, T} \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

Бачимо, що задача (5.1) відповідає математичній моделі класичної транспортної задачі. Умовою існування розв'язку задачі (5.1) є така:

$$\sum_{i=1}^T N_i \geq \sum_{j=1}^T b_j \quad (5.2)$$

– загальний попит на продукцію фірми у плановому періоді не повинен перевищувати загальні виробничі потужності фірми на весь цей період.

У разі виконання умови (5.2) задачу про оптимізацію календарного плану виробництва, зберігання та поставок продукції можна розв'язувати за методом потенціалів. Не виключено, що для використання методу потенціалів попередньо доведеться ввести фіктивного споживача. У такому разі фіктивні поставки означатимуть недовикористання фірмою виробничих

потужностей у певні дні планового періоду внаслідок браку замовлень на продукцію.

5.2. Приклад розв'язування задачі на ПК

Розглянемо задачу про оптимізацію календарного плану виробництва, зберігання та поставок продукції на плановий період тривалістю 4 дні, користуючись вихідними даними з таблиці 5.1. Відомо також, що витрати на зберігання продукції на складі фірми упродовж доби дорівнюють 5 гривень, а втрати внаслідок затримки із надсиланням продукції замовникам – 10 гривень за кожний день затримки, з розрахунку на одиницю продукції.

Таблиця 5.1

Вихідні дані до задачі про формування календарного плану виробництва, зберігання та поставок продукції

Показник	Позначення	Календарні дні планового періоду			
Номер доби	$i (j)$	1	2	3	4
Виробнича потужність	N_i	100	200	250	150
Собівартість одиниці продукції	s_i	15	25	30	10
Обсяг замовлення	b_j	130	190	180	140

Потрібно визначити календарний план виробництва, зберігання та поставок продукції таким чином, щоб загальні виробничі витрати, витрати на зберігання продукції та втрати внаслідок затримок із надсиланням продукції замовникам були мінімальними.

Насамперед слід переконатися у розв'язуваності задачі – перевірити виконання умови існування її розв'язку (5.2). Для цього обчислимо загальні виробничі потужності фірми у плановому періоді:

$$\sum_{i=1}^4 N_i = 100 + 200 + 250 + 150 = 700 \text{ (одиниць продукції)},$$

а також загальний попит на продукцію у цей період:

$$\sum_{j=1}^4 b_j = 130 + 190 + 180 + 140 = 640 \text{ (одиниць продукції)}.$$

Оскільки виробничі потужності фірми є достатніми для виконання усіх замовлень, задача розв'язувана, треба лише знайти найекономічніший календарний план виробництва, зберігання та поставок продукції.

Щоб розв'язувати поставлену задачу як транспортну, обчислимо "транспортні тарифи", які окрім питомих виробничих витрат враховують необхідні витрати на зберігання цієї продукції або втрати внаслідок затримок із її поставкою замовникам; занесемо результати у таблицю 5.2. Наприклад, якщо одиниця продукції виготовлена на третій день та одразу ж надіслана споживачу на виконання замовлення, сформованого на цей самий день, тоді

фірма несе лише виробничі витрати у сумі 30 грн. Коли ж ця продукція зберігатиметься впродовж однієї доби на складі фірми та буде надіслана наступного дня (четвертий день планового періоду) на виконання замовлення на четвертий день, в додаток до виробничих витрат 30 грн. фірма нестиме ще й витрати на зберігання продукції впродовж однієї доби – 5 грн., отже сукупний "тариф" складатиме 35 грн. Навпаки, якщо виготовлена третього дня продукція надсилатиметься в рахунок виконання замовлення, сформованого на перший день планового періоду, фірма окрім виробничих витрат 30 грн. нестиме додаткові збитки за два дні затримки із виконанням замовлення, тобто загальний "тариф" становитиме: $30+2*10=50$ грн., що і показано у клітинці таблиці 5.2, яка відповідає третьому дню виготовлення продукції (передостанній рядок) та першому дню, на який замовлено продукцію.

Таблиця 5.2

Питомі витрати на виробництво, зберігання або втрати внаслідок затримок із поставкою продукції, залежно від дня виготовлення та дня замовлення продукції, гривень

День виготовлення продукції	День, на який замовлено продукцію			
	1	2	3	4
1	15	20	25	30
2	35	25	30	35
3	50	40	30	35
4	40	30	20	10

Тепер скористаємося комп'ютером. Відкриємо нову робочу книгу Excel, яку назвемо "Kalend-Pl.xls" та звернемося до її першого аркуша "Лист 1".

1. Об'єднаємо клітинки A1:D1 та внесемо туди скорочену назву задачі: "Оптимізація календарного плану".

2. У клітинках A3:C3, які об'єднаємо, запишемо назву показника: "Тривалість планового періоду", а його значення – 4 дні – занесемо у клітинку D3.

3. Масив клітинок A5:C11 відведемо для інформаційного блоку про щодобові виробничі потужності фірми та очікувану у відповідні дні планового періоду собівартість виробництва одиниці продукції. Необхідні дані візьмемо з перших двох рядків таблиці 5.1. Для обчислення загальних виробничих потужностей фірми у клітинку B11 введемо функцію підсумовування: =СУММ(B7:B10).

4. У клітинках A13: D14 сформуємо інформаційний блок про показник витрат на зберігання одиниці продукції упродовж однієї доби (5 гривень), а у клітинках A16: D17 – інформаційний блок про показник втрат через затримку з поставкою одиниці продукції на одну добу (10 гривень).

5. У клітинках A19:F21 побудуємо інформаційний блок про календарний план замовлень продукції. Потрібні числові дані візьмемо з

останнього рядка таблиці 5.1. Щоб автоматично обчислювати загальний попит на продукцію фірми, у клітинку F21 введемо функцію підсумовування: =СУММ(B21:E21).

6. Для інформації про питомі витрати на виробництво, зберігання або втрати внаслідок затримок із поставкою продукції, залежно від дня виготовлення та дня замовлення продукції, наведеної у таблиці 5.2, відведемо клітинки A23:E29; відповідну таблицю на робочому листі назвемо скорочено: "Тарифи".

7. Інформаційний блок про календарний план виробництва, зберігання та поставок продукції розташуємо в масиві клітинок A31:F38, залишаючи незадіяною лише останню клітинку цього масиву F38. У тому числі для матриці основних змінних $X = \|x_{ij}\|_{(4)}$, які показують щодобові обсяги виробництва з урахуванням календарних дат відповідних замовлень, відведемо масив B34:E37. У масиві F34:F38 введемо функції підсумовування, щоб обчислювати щодобові обсяги виробництва, у масиві B38:E38 – функції підсумовування, щоб знаходити обсяги продукції, що виготовлятиметься на рахунок кожного щоденного замовлення.

8. Нарешті, масив клітинок A40:C40 відведемо для інформаційного блоку про загальні виробничі витрати, витрати на зберігання продукції та втрати внаслідок затримок із надсиланням продукції замовникам. Для цього в клітинках A40 і B40, які об'єднаємо, впишемо назву: "Загальні витрати, гривень", а в клітинку C40, яка буде цільовою, введемо формулу:

=СУММПРОИЗВ(B26:E29; B34:E37)

9. Оберемо команду **“Поиск решения”** в меню **“Сервис”**.

10. В полі **“Установить целевую ячейку”** діалогового вікна **“Поиск решения”** вкажемо на адресу цільової клітинки: C40.

11. Перемикач вибору оптимізаційного спрямування цільової функції увімкнемо у положення **“минимальному значению”**.

12. У полі **“Изменяя ячейки”** вкажемо на адреси клітинок з основними незалежними змінними: B34:E37.

13. У поле **“Ограничения”** введемо обмеження задачі. Для цього натискатимемо кнопку **“Добавить”** та введемо обмеження щодо щодобових виробничих потужностей фірми:

\$F\$34:\$F\$37	<=	\$B\$7:\$B\$10
-----------------	----	----------------

та щодо необхідності повного виконання кожного з щоденних замовлень упродовж планового періоду:

\$B\$38:\$E\$38	=	\$B\$21:\$E\$21
-----------------	---	-----------------

14. Введемо параметри пошуку рішення: **“Линейная модель”**, **“Неотрицательные переменные”** та дамо команду **“Выполнить”**.

Робочий лист файлу "Kalend-Pl.xls" з результатами розв'язування задачі про оптимізацію календарного плану виробництва, зберігання та поставок продукції наведено на рисунку 5.1. Найекономічнішому календарному плану відповідають загальні витрати у сумі 14300 грн.

	A	B	C	D	E	F
1	Оптимізація календарного плану					
2						
3	Тривалість планового періоду –			4 дні		
4						
5	Вихідні виробничі показники планового періоду					
6	Доба	Потужність	Собівартість			
7	1	100	15			
8	2	200	25			
9	3	250	30			
10	4	150	10			
11	Разом:	700	–			
12						
13	Витрати на зберігання одиниці продукції			5 грн.		
14	упродовж однієї доби –					
15						
16	Втрати через затримку з поставкою одиниці			10 грн.		
17	продукції на одну добу –					
18						
19	Календарний план замовлень					
20	Доба	1	2	3	4	Разом
21	Обсяг	130	190	180	140	640
22						
23	"Тарифи"					
24	Дата виготовлення	День, на який замовлено продукції				
25		1	2	3	4	
26	1	15	20	25	30	
27	2	35	25	30	35	
28	3	50	40	30	35	
29	4	40	30	20	10	
30						
31	План виробництва, зберігання та поставок продукції					Виготов- лено, всього
32	Дата виготовлення	День, на який замовлено продукції				
33		1	2	3	4	
34	1	100	0	0	0	
35	2	30	170	0	0	
36	3	0	20	170	0	
37	4	0	0	10	140	
38	Надіслано	130	190	180	140	
39						
40	Загальні витрати, гривень		14300			

Рис. 5.1. Робочий лист з умовами та розв'язком задачі про оптимізацію календарного плану виробництва, зберігання та поставок продукції

З наведених на рис. 5.1 результатів бачимо, що виробничі потужності першого дня використовуються повністю. Всі 100 одиниць виготовленої продукції надсилаються споживачам на рахунок замовлення, що існувало для першого дня. Водночас повністю виконати це замовлення (130 одиниць продукції) фірма за один день не може. Тому решту – 30 одиниць – буде виготовлено та відправлено наступного дня. Всього ж у другий день планового періоду буде виготовлено 200 одиниць продукції (тобто наявні потужності буде використано повністю), з яких 170 спрямовано на покриття замовлення, що було для другого дня. Повністю це замовлення (190 одиниць продукції) фірма виконати поки що не може, тому залишок у кількості:

$$190 - 170 = 20 \text{ (одиниць продукції)}$$

буде надіслано із запізненням на одну добу.

В третій день фірмі доцільно виготовити лише 190 одиниць продукції (хоча потужності складатимуть 250 одиниць), з яких 20 надіслати в рахунок попереднього замовлення, а 170 – в рахунок замовлення на цей день. Решту 10 одиниць замовленої на третій день продукції фірмі вигідно виготовити останнього дня, разом із 140 одиницями продукції, замовленої на четвертий день, тобто виробничі потужності останнього дня буде використано повністю.

Наведений календарний план виробництва, зберігання та поставок продукції є найекономічнішим, оскільки довільний інший допустимий план не дозволить фірмі виконати усі замовлення з витратами меншими, аніж 14300 грн. Водночас задача має альтернативні оптимальні плани, один з яких наведено у таблиці 5.3. Зауважимо, що пошук альтернативних оптимальних планів вимагає спеціального додаткового дослідження.

Таблиця 5.3

Альтернативний оптимальний календарний план виробництва, зберігання та поставок продукції (теж відповідає загальним витратам 14300 грн.)

План виробництва, зберігання та поставок продукції					
День виготовлення	День, на який замовлено продукцію				Виготовлено, всього
	1	2	3	4	
1	100	0	0	0	100
2	10	190	0	0	200
3	20	0	170	0	190
4	0	0	10	140	150
Надіслано	130	190	180	140	

Коли оптимізаційна задача має декілька оптимальних планів, бажано спробувати описати всю множину таких планів, а також звернутися до аналізу постановки задачі з метою визначення додаткових аспектів, які, можливо, доцільно врахувати, щоб обрати остаточне рішення.

5.3. Завдання для самостійного опрацювання

1. Знайдіть розв'язок задачі про оптимізацію календарного плану виробництва, зберігання та поставок продукції за методом потенціалів. Порівняйте з результатами обчислень на ПК.

2. Опишіть розв'язок, зазначивши в описі:

а) план виробництва, рівень використання виробничих потужностей, щодобові виробничі витрати;

б) динаміку руху запасів, витрати за зберігання продукції;

в) план виконання календарних замовлень, втрати внаслідок вимушених затримок у поставках продукції замовникам.

3. Проаналізуйте розв'язок щодо існування альтернативних оптимальних планів. У разі існування опишіть всю множину оптимальних планів.

4. Як зміниться розв'язок задачі, якщо фірма втратить можливість зберігати продукцію понад 2 дні, а замовники відмовляться отримувати продукцію із запізненням, що перевищує 1 день?

Вказівка. Спочатку внесіть потрібні зміни до економіко–математичної моделі задачі, щоб врахувати додаткові умови.

5. Які пропозиції щодо дій фірми можна запропонувати, якщо загальний попит на продукцію фірми у плановому періоді буде перевищувати виробничі потужності фірми на цей період?

РОЗДІЛ 6. ОПТИМІЗАЦІЯ ПЛАНУ ПЕРЕВЕЗЕНЬ ПРОДУКЦІЇ ЗА НАЯВНОСТІ ПРОМІЖНИХ ПУНКТІВ МІЖ ПОСТАЧАЛЬНИКАМИ ТА СПОЖИВАЧАМИ (БАГАТОЕТАПНА ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА)

- 6.1. Загальна характеристика багатоетапних транспортних задач
- 6.2. Розв'язування двохетапної транспортної задачі
- 6.3. Розв'язування багатоетапної транспортної задачі
- 6.4. Завдання для самостійного опрацювання

6.1. Загальна характеристика багатоетапних транспортних задач

Класична транспортна задача, яку було опрацьовано у розділі 2, є одноетапною у тому розумінні, що в ній продукція від постачальників надходить безпосередньо до споживачів. Навпаки, в багатоетапних транспортних задачах продукція від постачальників спочатку надходить на проміжні пункти (вузли транспортної мережі, розподільчі центри, склади), де, у разі потреби, вона перевантажується або ж розвантажується та певний час зберігається. Тобто до кінцевих споживачів продукція надходить не від постачальників, а з зазначених проміжних пунктів транспортних мереж.

Розрізняють двохетапні транспортні задачі, коли перевезення продукції здійснюється у два етапи: спочатку від постачальника на проміжний пункт, далі – з цього проміжного пункту до споживача (рис. 6.1), та багатоетапні – коли на шляху від постачальника до споживача проміжних пунктів є декілька (рис. 6.2).



Рис. 6.1. Рух продукції у двохетапній транспортній задачі

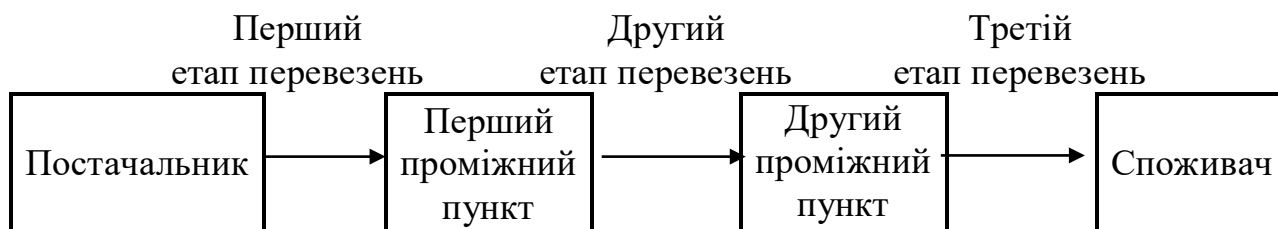


Рис. 6.2. Рух продукції у багатоетапній (зараз – трьохетапній) транспортній задачі

Продукція, що перевозитиметься, вважається однорідною.
Постачальників, проміжних пунктів та споживачів є декілька.

Вважаються відомими запаси продукції у постачальників, пропускні спроможності проміжних пунктів, потреби споживачів, а також тарифи на перевезення одиниці продукції та пропускні спроможності кожного із маршрутів. За цих умов потрібно визначити найекономічніший план перевезень продукції від постачальників до споживачів.

6.2. Розв'язування двохетапної транспортної задачі

Постановка та економіко–математична модель задачі. Позначимо кількість постачальників через m , а обсяг наявної у кожного з них продукції через a_i ($i = \overline{1, m}$). Кількість споживачів позначимо через n , попит кожного споживача – через b_j ($j = \overline{1, n}$). Припускається, що перевезення продукції від постачальників до споживачів здійснюватимуться у два етапи. Спочатку продукція від постачальників надходитиме на проміжні пункти, а вже з проміжних пунктів – до споживачів (рис. 6.3). Кількість проміжних пунктів позначимо через p , а пропускну спроможність окремого k -го проміжного пункту – через c_k ($k = \overline{1, p}$).

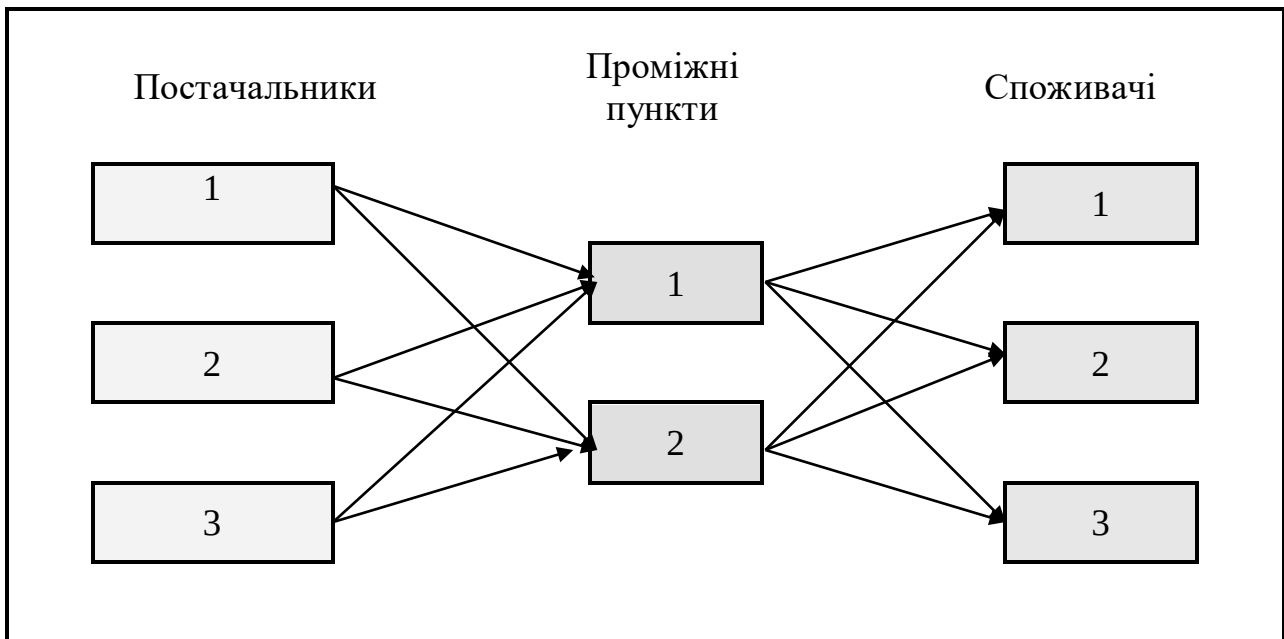


Рис. 6.3. Транспортна мережа двохетапної транспортної задачі
($m = 3, n = 3, p = 2$)

Витрати на перевезення одиниці продукції від i -го постачальника на k -й проміжний пункт позначимо через s_{ik} ($i = \overline{1, m}; k = \overline{1, p}$), а витрати на перевезення одиниці продукції з k -го проміжного пункту до j -го споживача – через t_{kj} ($k = \overline{1, p}; j = \overline{1, n}$). Пропускні спроможності кожного з маршрутів вважатимемо необмеженими.

Потрібно знайти обсяги x_{ik} перевезень продукції від постачальників на проміжні пункти ($i = \overline{1, m}; k = \overline{1, p}$) та обсяги y_{kj} перевезень продукції з проміжних пунктів до споживачів ($k = \overline{1, p}; j = \overline{1, n}$), щоб загальні витрати z на здійснення усіх перевезень були б мінімальними.

За наведених умов і позначень економіко–математична модель двохетапної транспортної задачі набирає вигляду:

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^p s_{ik} x_{ik} + \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^n t_{kj} y_{kj} \rightarrow \min \quad (6.1)$$

$$\sum_{k=1}^p x_{ik} \leq a_i, \quad i = \overline{1, m} \quad (6.2)$$

$$\sum_{k=1}^p y_{kj} = b_j, \quad j = \overline{1, n} \quad (6.3)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ik} = \sum_{j=1}^n y_{kj} \leq c_k, \quad k = \overline{1, p} \quad (6.4)$$

$$x_{ik} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, p} \quad (6.5)$$

$$y_{kj} \geq 0, \quad k = \overline{1, p}, \quad j = \overline{1, n} \quad (6.6)$$

Цільова функція (6.1) задачі (6.1) – (6.6) відбиває вимогу пошуку найекономічнішого плану перевезень продукції. Інші умови задачі означають, відповідно, що:

(6.2) – обсяг продукції, що вивозитиметься від кожного постачальника, не повинен перевищувати наявного у нього запасу;

(6.3) – обсяг продукції, що завозитиметься кожному споживачу, має відповідати його попиту;

(6.4) – вся продукція, що завозитиметься на кожний проміжний пункт від постачальників, має бути потім надісланою до споживачів, причому слід враховувати пропускні спроможності кожного проміжного пункту;

(6.5), (6.6) – обсяги перевезень за кожним із маршрутів мають бути невід’ємними.

Математично задача (6.1) – (6.6) є задачею лінійного програмування з неперервними невід’ємними змінними. Її можна розв’язувати симплекс–методом або ж звести до класичної одноетапної транспортної задачі та розв’язувати за методом потенціалів.

Умовами існування розв’язку задачі є такі:

1) загальний запас продукції у всіх постачальників дозволяє задовольнити сукупний попит усіх споживачів:

$$\sum_{i=1}^m a_i \geq \sum_{j=1}^n b_j \quad (6.7)$$

2) пропускні спроможності усіх проміжних пунктів достатні для опрацювання сукупного потоку продукції у транспортній мережі:

$$\sum_{j=1}^n b_j \leq \sum_{k=1}^p c_k \quad (6.8)$$

Опрацюємо методику розв'язування двохетапної транспортної задачі на комп'ютері у припущенні, що умови (6.7) – (6.8) існування розв'язку справджуються.

Вихідні дані до задачі та підготовка робочого аркушу Excel. Розглянемо задачу про оптимізацію плану перевезень пального з трьох сховищ C_1 , C_2 і C_3 через два розподільчих пункти P_1 і P_2 на чотири автозаправні станції (АЗС) A_1 , A_2 , A_3 та A_4 . Запас пального у сховищах дорівнює, відповідно, 50, 60 і 120 тон. Через розподільчий пункт P_1 можна перевезти не більше 120 т пального, через пункт P_2 – не більше 150 т. Потреби АЗС складають відповідно, 30, 50, 70 і 80 тон. З сховищ до розподільчих пунктів пальне перевозиться десятитонними цистернами, а з розподільчих пунктів до АЗС – п'ятитонними. Витрати (у гривнях) на перевезення однієї цистерни з сховищ до розподільчих пунктів наведено у таблиці 6.1, а з розподільчих пунктів до АЗС – у таблиці 6.2.

Таблиця 6.1

Сховище	Розподільчий пункт	
	P_1	P_2
C_1	50	40
C_2	30	50
C_3	40	40

Таблиця 6.2

Розподільчий пункт	Автозаправна станція			
	A_1	A_2	A_3	A_4
P_1	30	35	25	30
P_2	35	20	40	30

Потрібно за критерієм мінімізації загальних транспортних витрат визначити оптимальний план перевезень пального зі сховищ до АЗС. З'ясувати, яка частина загальних транспортних витрат припадає на перший етап перевезень (зі сховищ до розподільчих пунктів), а яка на другий (з розподільчих пунктів до АЗС)?

Відкриємо нову робочу книгу "Palne.xls", об'єднаємо клітинки $A1:H1$ та запишемо назву задачі: "Оптимізація плану перевезень пального".

Далі в клітинках $A3:B7$ побудуємо таблицю з інформацією про запаси пального на сховищах, у тому числі у клітинку $B7$ введемо формулу підсумовування ($=СУММ(B4:B6)$), щоб автоматично знаходити загальний запас пального на усіх трьох сховищах (230 т).

У клітинках $D3:E6$ побудуємо таблицю з інформацією про пропускні спроможності розподільчих пунктів, причому в клітинку $E6$ вставимо формулу підсумовування ($=СУММ(E4:E5)$) для визначення загальної пропускної спроможності усіх розподільчих пунктів (270 т).

В клітинках $G3:H8$ побудуємо таблицю з інформацією про потреби автозаправних станцій, у тому числі для заходження загальних потреб усіх

АЗС в клітинку Н8 вставимо формулу підсумовування (=СУММ(Е4:Е5)), результатом використання якої буде число 230 (тон пального).

Пересвідчуємося у тому, що умови (6.7) – (6.8) існування розв'язку для нашої задачі про оптимізацію плану перевезень пального справджуються.

Продовжимо підготовку робочого аркушу для подальшого пошуку цього розв'язку.

У масиві клітинок А10:С15 побудуємо таблицю з інформацією про витрати на перевезення однієї тони пального за кожним з маршрутів від сховищ до розподільчих пунктів. Для цього кожний з показників таблиці 6.1 розділимо на 10, оскільки на даному етапі перевезення здійснюватимуться 10-тонними цистернами.

У масиві клітинок Е10:І14 побудуємо таблицю з інформацією про витрати на перевезення однієї тони пального за кожним з маршрутів від розподільчих пунктів до автозаправних станцій. На цих маршрутах використовуватимуться 5-тонні цистерни, тому кожний з показників таблиці 6.2 слід розділити на 5.

На рисунку 6.4 показано, як виглядатиме робочий аркуш Excel після заповнення таблиць з показниками питомих витрат на перевезення за усіма маршрутами.

В клітинках А17:С22 побудуємо таблицю, призначену для інформації про обсяги перевезень пального за кожним з маршрутів від сховищ до розподільчих пунктів, а в клітинках Е17:І21 – таблицю для інформації про обсяги перевезень пального за кожним з маршрутів від розподільчих пунктів до автозаправних станцій. Причому для основних змінних задачі про обсяги перевезень відведемо у цих таблицях масиви клітинок В20:С22 та F20:І21.

Проміжні результати про обсяги вивезеного із кожного сховища пального розміщатимемо в клітинках D20:D22; про обсяги ввезеного на кожний розподільчий пункт пального – в клітинках В23:С23, про обсяги вивезеного з кожного розподільчого пункту пального – в клітинках J20:J21, а про обсяги пального, ввезеного на кожену АЗС, – у клітинках F22:І22. Для цього у зазначені клітинки введемо потрібні формули підсумовування.

Таблицю з інформацією про транспортні витрати (на кожному з етапів перевезень та загальні) побудуємо у масиві клітинок А24:С27. Для цього занесемо формули:

у клітинку С24: =СУММПРОИЗВ(В13:С15;В20:С22)

у клітинку С25: =СУММПРОИЗВ(F13:І14;F20:І21)

у клітинку С26: =СУММ(С25:С26)

Нарешті, зробимо таблиці для допоміжної інформації про кількість цистерн, які слід буде перевезти за кожним із маршрутів: на першому етапі перевезень, з використанням 10-тонних цистерн, – у клітинках А29:С24; на другому етапі, з використанням 5-тонних цистерн, – у клітинках Е29:І33. Щоб обчислити відповідні показники, слід для клітинок В32:С34 значення відповідних клітинок В20:С22 розділити на 10, а для клітинок F32:І33 – значення відповідних клітинок F20:І21 розділити на 5. Підготовку робочого аркушу закінчено.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Оптимізація плану перевезень пального									
2										
3	Сховище	Запас		Розподільчий пункт	Пропускна спроможність		АЗС	Потреба		
4	C-1	50		P-1	120		A-1	30		
5	C-2	60		P-2	150		A-2	50		
6	C-3	120		Разом:	270		A-3	70		
7	Разом:	230					A-4	80		
8							Разом:	230		
9										
10	Витрати на перевезення 1т пального				Витрати на перевезення 1т пального					
11	Сховище	Розподільчий пункт			Розподільчий пункт	АЗС				
12		P-1	P-2			A-1	A-2	A-3	A-4	
13	C-1	5	4		P-1	6	7	5	6	
14	C-2	3	5		P-2	7	4	8	6	
15	C-3	4	4							
16										

Рис. 6.4. Робочий аркуш книги "Palne.xls" з результатами розв'язування задачі про оптимізацію плану перевезень пального (початок)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
17	Обсяг перевезень пального, тон				Обсяг перевезень пального, тон					
18	Сховище	Розподільчий пункт			Розподільчий пункт	АЗС				
19		P-1	P-2	Всього		A-1	A-2	A-3	A-4	Всього
20	C-1	0	50	50	P-1	30	0	70	0	100
21	C-2	60	0	60	P-2	0	50	0	80	130
22	C-3	40	80	120	Всього	30	50	70	80	
23	Всього	100	130							
24	Витрати на перевезення									
25	На першому етапі		860							
26	На другому етапі		1210							
27	Загальні		2070							
28										
29	Обсяг перевезень пального, цистерн 10т				Обсяг перевезень пального, цистерн 5т					
30	Сховище	Розподільчий пункт			Розподільчий пункт	АЗС				
31		P-1	P-2			A-1	A-2	A-3	A-4	
32	C-1	0	5		P-1	6	0	14	0	
33	C-2	6	0		P-2	0	10	0	16	
34	C-3	4	8							

Рис. 6.5. Робочий аркуш книги "Palne.xls" з результатами розв'язування задачі про оптимізацію плану перевезень пального (закінчення)

Розв’язування задачі з використанням інструменту пошуку рішення Excel. Оберемо команду “Поиск решения” в меню “Сервис”.

У діалоговому вікні “Поиск решения” в полі “Установить целевую ячейку” вкажемо на адресу цільової клітинки: C27.

Перемикач вибору оптимізаційного спрямування цільової функції ввімкнемо у положення “**минимальному значению**”.

У полі “Изменяя ячейки” вкажемо на адреси клітинок з основними незалежними змінними, які відповідають обсягам перевезень пального за кожним з маршрутів: \$B\$20:\$C\$22;\$F\$20:\$I\$21.

Далі введемо обмеження задачі. Для цього, натискаючи кнопку “Добавить”, послідовно введемо обмеження:

1) щодо запасів пального на сховищах:

\$D\$20:\$D\$22	<=	\$B\$4:\$B\$6
-----------------	----	---------------

2) щодо обсягів перевезень пального через розподільчі пункти:

\$B\$23:\$C\$23	=	\$J\$20:\$J\$21
\$J\$20:\$J\$21	<=	\$E\$4:\$E\$5

3) щодо обсягів пального, яке слід завезти на кожну АЗС:

\$F\$22:\$I\$22	=	\$H\$4:\$H\$7
-----------------	---	---------------

Вкажемо потрібні параметри пошуку рішення: “**Линейная модель**” та “**Неотрицательные переменные**”, після чого натиснемо відповідні кнопки: “ОК”, “Выполнить”.

У вікні “Результаты поиска решения” увімкнемо перемикач “Сохранить найденное решение” та натиснемо ОК.

Знайдений розв’язок показано на рисунку 6.5. Оптимальному плану перевезень відповідають мінімальні загальні транспортні витрати у розмірі 2070 гривень, у тому числі на першому етапі перевезень (зі сховищ до розподільчих пунктів) – 860 гривень, а на другому етапі (з розподільчих пунктів до АЗС) – 1210 гривень.

При розв’язуванні задачі нам трошки поталанило – усі показники щодо кількості цистерн в оптимальному плані перевезень виявилися цілими. У супротивному випадку довелося б за основні змінні моделі обрати не обсяги перевезень пального в тонах, а кількості цистерн (відповідно, десятитонних або п’ятитонних) для перевезення пального за наявними маршрутами від сховищ до розподільчих пунктів і з розподільчих пунктів до автозаправних станцій, та вводити додаткові обмеження щодо цілочисловості таких змінних. Зрозуміло, що зазначені зміни викличуть також певні зміни в моделі, при оформленні робочого аркушу та у процесі налагодження інструменту пошуку рішення для розв’язування задачі.

6.3. Розв'язування багатоетапної транспортної задачі

Граф транспортної системи маршрутів. При розв'язуванні багатоетапних транспортних задач транспортну систему маршрутів зручно подати у вигляді орієнтованого графа. Такий граф містить вершини та дуги. Вершини відповідають окремим пунктам транспортної мережі: початковим, проміжним та кінцевим. У початкових пунктах розташовані постачальники продукції, у кінцевих – споживачі. Проміжні пункти є транзитними – в них продукція, у разі необхідності, може перевантажуватися та перевозитися далі. Функції транзитних можуть також виконувати й певні початкові та кінцеві пункти, якщо відповідна вершина має одночасно як вхідні так і вихідні дуги.

Усі вершини графа занумеруємо натуральними числами: $1, 2, \dots, n$. Тоді кожна наявна у графі дуга (i, j) означає, що від пункту i до пункту j існує безпосереднє транспортне сполучення. Вважатимемо, що з вершини i до вершини j може бути проведена максимум одна дуга. Це означає, що коли безпосередніх транспортних сполучень від пункту i до пункту j є декілька, для графа потрібно обрати лише одне з них (скажімо, або найкоротше, або найекономічніше – залежно від умов задачі, яка розв'язуватиметься).

Якщо між вершинами i та j проведено дві дуги – дугу (i, j) та дугу (j, i) , – це свідчить про можливість перевезень продукції як з пункту i до пункту j , так і у зворотному напрямі – від пункту j до пункту i . Зверніть увагу, що в орієнтованому графі такі дві дуги вважаються різними.

Якщо дуга (i, j) на графі відсутня, це свідчить про відсутність безпосереднього транспортного сполучення від пункту i до пункту j .

На графі будуть відсутні петлі – дуги, які починаються та закінчуються в одній і тій самій вершині.

Приклад графа транспортної системи маршрутів наведено на рис. 6.6.

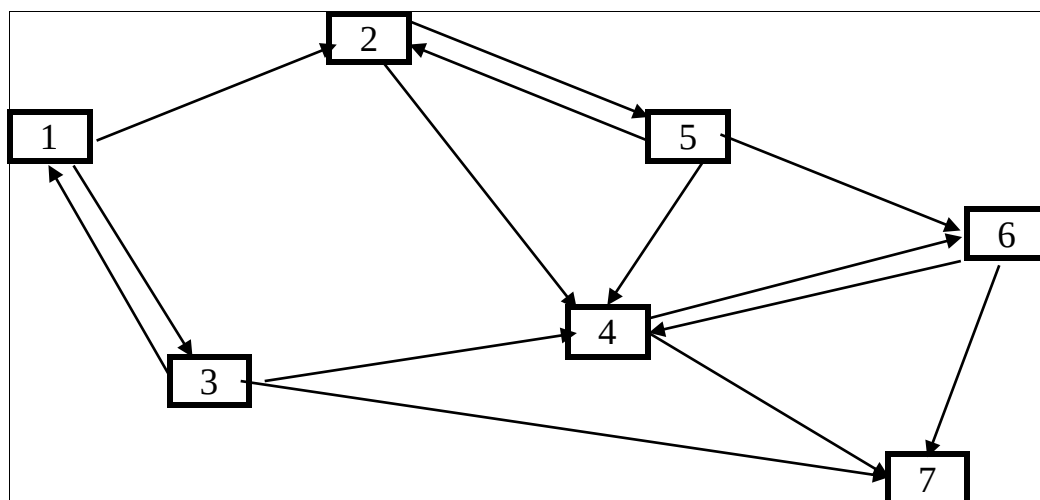


Рис. 6.6. Граф транспортної системи маршрутів

Цей граф має 7 вершин та 14 дуг: (1, 2), (1, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 1), (3, 4), (3, 7), (4, 6), (4, 7), (5, 2), (5, 4), (5, 6), (6, 4), та (6, 7).

Постановка задачі оптимізації плану перевезень продукції на транспортній мережі. Припустимо, що деяка однорідна продукція зосереджена у сховищах, розміщених у пунктах 1, 3 і 5 (дивись рис. 6.6), у кількості, відповідно, a_1 , a_3 і a_5 одиниць. Покладемо запаси цієї продукції в інших пунктах (пункти 2, 4, 6 і 7) такими, що дорівнюють нулю:

$$a_2 = a_4 = a_6 = a_7 = 0.$$

Наявною продукцією потрібно забезпечити підприємства, розташовані у пунктах 6 і 7. Потреби цих пунктів дорівнюють, відповідно, b_6 і b_7 одиниць продукції. Потреби інших пунктів (пункти 1, 2, 3, 4 і 5) вважатимемо нульовими:

$$b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = 0.$$

Відомі також транспортні тарифи c_{ij} на перевезення одиниці продукції за кожним із наявних транспортних сполучень:

Дуга	(1, 2)	(1, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(3, 1)	(3, 4)	(3, 7)	(4, 6)	(4, 7)	(5, 2)	(5, 4)	(5, 6)	(6, 4)	(6, 7)
Тариф	c_{12}	c_{13}	c_{24}	c_{25}	c_{31}	c_{34}	c_{37}	c_{46}	c_{47}	c_{52}	c_{54}	c_{56}	c_{64}	c_{67}

Потрібно знайти такий план перевезень продукції від постачальників до споживачів, щоб загальні транспортні витрати були мінімальними.

Необхідна умова існування розв'язку задачі є очевидною: сукупний запас продукції у постачальників має бути достатнім для забезпечення усіх потреб споживачів:

$$\sum_{i=1}^n a_i \geq \sum_{i=1}^n b_i \quad (6.9)$$

Але ця умова не є достатньою – існування розв'язку залежить також від топології транспортної мережі. Тому вирішуватимемо питання про існування розв'язку одночасно з пошуком цього розв'язку на персональному комп'ютері.

Економіко–математична модель. Щоб формалізувати умови задачі про оптимізацію плану перевезень продукції на транспортній мережі, позначимо множину дуг графа транспортної системи маршрутів через U .

Для кожної дуги $(i, j) \in U$ уведемо змінну x_{ij} , яка показує обсяг перевезень продукції за відповідним транспортним сполученням (i, j) .

Тоді цільова функція задачі, спрямована на мінімізацію загальних транспортних витрат z , набере вигляду:

$$z = \sum_{(i, j) \in U} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (6.10)$$

Обмеження задачі відбивають наступні вимоги:

1) з кожного i -го пункту можна вивезти продукції не більше, аніж у цей пункт завезено, з урахуванням наявних запасів a_i та власного споживання b_i :

$$b_i + \sum_{j:(i,j) \in U} x_{ij} \leq a_i + \sum_{k:(k,i) \in U} x_{ki}, \quad i = \overline{1, n} \quad (6.11)$$

2) обсяги перевезень можуть набирати лише невід'ємні значення:

$$x_{ij} \geq 0 \text{ для всіх } (i, j) \in U \quad (6.12)$$

Задача (6.10) – (6.12) є задачею лінійного програмування. Інструмент **“Поиск решения”** Ехсел дозволяє розв'язувати такі багатоетапні транспортні задачі оптимізації плану перевезень продукції, якщо кількість дуг графа транспортної системи маршрутів не перевищує 200. Це обмеження є цілком прийнятним для більшості відповідних практичних задач оптимізації логістичних рішень.

Конкретизуємо загальну економіко–математичну модель (6.10) – (6.12) задачі оптимізації плану перевезень продукції на транспортній мережі для прикладу, наведеного у попередньому пункті та проілюстрованого рисунком 6.6:

$$z = c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{24}x_{24} + c_{25}x_{25} + c_{31}x_{31} + c_{34}x_{34} + c_{37}x_{37} + \\ + c_{46}x_{46} + c_{47}x_{47} + c_{52}x_{52} + c_{54}x_{54} + c_{56}x_{56} + c_{64}x_{64} + c_{67}x_{67} \rightarrow \min$$

$$x_{12} + x_{13} \leq a_1 + x_{31}$$

$$x_{24} + x_{25} \leq x_{12} + x_{52}$$

$$x_{31} + x_{34} + x_{37} \leq a_3 + x_{13}$$

$$x_{46} + x_{47} \leq x_{24} + x_{54} + x_{56} + x_{64}$$

$$x_{52} + x_{54} + x_{56} \leq a_5 + x_{25}$$

$$b_6 + x_{64} + x_{67} \leq x_{46} + x_{56}$$

$$b_7 \leq x_{37} + x_{47} + x_{67}$$

$$x_{12}, x_{13}, x_{24}, x_{25}, x_{31}, x_{34}, x_{37}, x_{46}, x_{47}, x_{52}, x_{54}, x_{56}, x_{64}, x_{67} \geq 0$$

У випадку, якщо кількість вершин графа транспортної системи маршрутів не перевищує 14, підготовку робочого аркушу Ехсел та налагодження інструменту **“Поиск решения”** можна значно спростити. Спрощення полягає у поданні плану перевезень повною квадратною матрицею $X = \|x_{ij}\|_{(n)}$, з подальшою заборонаю перевезень за тими маршрутами (i, j) , які відсутні на графі транспортної системи. Щоб врахувати цю заборону, за зазначеними фіктивними маршрутами питомі вартості перевезень слід покласти надзвичайно великими – скажімо, обрати для них число, яке в 1000 раз перевищує максимальний з тарифів за реальними маршрутами:

$$1000 \cdot M, \text{ де } M = \max\{c_{ij} \mid (i, j) \in U\}.$$

Якщо розв'язок такої задачі не міститиме перевезень за фіктивними маршрутами, це свідчитиме про те, що знайдено оптимальний план перевезень на реальній транспортній мережі. Коли ж оптимальний план

міститиме перевезення за фіктивними маршрутами, це засвідчує, що необхідної умови (6.9) недостатньо для існування розв'язку задачі (6.10) – (6.12) – топологія транспортної мережі відповідної задачі не дозволяє побудувати жодний з допустимих планів забезпечення споживачів необхідними обсягами продукції.

Розв'язування багатоетапної транспортної задачі з використанням інструменту пошуку рішення Excel. Для опрацювання конкретного прикладу оптимізації плану перевезень продукції на транспортній мережі (дивись рис. 6.6 та відповідну постановку задачі) скористаємося наступними числовими значеннями вихідних параметрів (обсяги запасів та попиту на продукцію зазначено в натуральних одиницях; транспортні тарифи – у гривнях з розрахунку на одиницю продукції):

$$\begin{array}{llllll} a_1 = 1500 & a_3 = 1000 & a_5 = 300 & & b_6 = 1900 & b_7 = 800 \\ c_{12} = 20 & c_{13} = 10 & c_{24} = 15 & c_{25} = 8 & c_{31} = 6 & c_{34} = 5 & c_{37} = 12 \\ c_{46} = 8 & c_{47} = 20 & c_{52} = 3 & c_{54} = 9 & c_{56} = 11 & c_{64} = 10 & c_{67} = 5 \end{array}$$

Необхідна умова (6.9) існування розв'язку задачі виконується, оскільки загальний запас продукції у постачальників ($1500 + 1000 + 300 = 2800$) дозволяє задовольнити сукупний попит споживачів ($1900 + 800 = 2700$). Невелика кількість пунктів транспортної мережі (пунктів лише 7), у свою чергу, дозволяє застосувати спрощений підхід підготовки робочого аркушу Excel для використання пакету "Поиск решения" з метою пошуку розв'язку.

Покладемо транспортні тарифи за фіктивними маршрутами рівними 20000 грн., після чого всі вихідні дані зведемо до однієї таблиці (табл. 6.3).

Таблиця 6.3

Вихідні дані до задачі про оптимізацію плану перевезень на транспортній мережі

(зафарбовані клітинки відповідають фіктивним маршрутам)

a_j – запас у j -му пункті

b_i – попит i -го пункту

c_{ij} – транспортний тариф за маршрутом $i \rightarrow j$

i, b_i		j, a_j						
		1	2	3	4	5	6	7
		1500	0	1000	0	300	0	0
1	0	20000	20	10	20000	20000	20000	20000
2	0	20000	20000	20000	15	8	20000	20000
3	0	6	20000	20000	5	20000	20000	12
4	0	20000	20000	20000	20000	20000	8	20
5	0	20000	3	20000	9	20000	11	20000
6	1900	20000	20000	20000	10	20000	20000	5
7	800	20000	20000	20000	20000	20000	20000	20000
		c_{ij}						

Відкриємо нову книгу Excel під назвою "Bagatoet.xls" та у клітинках A1:I1 (об'єднуємо їх) впишемо назву задачі: "Оптимізація плану перевезень на транспортній мережі".

Блок клітинок A3:I14 відведемо для вихідних даних задачі, тобто для таблиці 6.3.

Блок клітинок A16:I26 відведемо для інформації про план перевезень, який підлягає визначенню. За своєю формою цей блок є копією фрагменту A3:I13 попереднього блоку. Значення змінних – про обсяги перевезень за окремими маршрутами – міститимуться у клітинках C20:I26. У клітинки A20:B26 заносимо копіюванням інформацію з клітинок A7:B13, а в клітинки C18:I19 – копію інформації з клітинок C5:I6.

Стовпчик J20:J26 відведемо для підсумовування елементів відповідного рядка від колонок B до I включно. Знайдені у цих клітинках за допомогою функцій підсумовування значення відповідатимуть лівим частинам обмежень (6.11).

Праві частини обмежень (6.11), у свою чергу, обчислюватимуться у клітинках C27:I27. Для цього в ці клітинки слід вставити функції підсумовування елементів відповідного стовпчика від рядка 19 до 26-го рядка включно.

Нарешті, у клітинках A29:D29 підготуємо інформаційний блок про загальні транспортні витрати. Для цього об'єднаємо клітинки A29:C29 та зафіксуємо в них назву цільового показника: "Загальні транспортні витрати", а в клітинку D29 впишемо формулу для його обчислення:

=СУММПРОИЗВ(C7:I13;C20:I26)

На цьому підготовку робочого аркушу закінчено.

Подальші дії досить прості. Оберемо команду **“Поиск решения”** в меню **“Сервис”** та в полі **“Установить целевую ячейку”** діалогового вікна інструменту пошуку рішення вкажемо на адресу цільової клітинки: D29.

Перемикач вибору оптимізаційного спрямування цільової функції ввімкнемо у положення **“минимальному значению”**.

У полі **“Изменяя ячейки”** вкажемо на адреси клітинок із змінними, які відповідають обсягам перевезень продукції за кожним з усіх маршрутів (реальних та фіктивних): \$C\$20:\$I\$26.

Щоб ввести обмеження задачі, натиснемо кнопку **“Добавить”** та у вікні обмеження впишемо:

\$J\$20:\$J\$26	<=	\$C\$27:\$I\$27
-----------------	----	-----------------

Насамкінець зазначимо потрібні **параметри** пошуку рішення: **“Линейная модель”**, **“Неотрицательные переменные”** та послідовно натиснемо кнопки: **“ОК”**, **“Выполнить”**.

У вікні **“Результаты поиска решения”** увімкнемо перемикач **“Сохранить найденное решение”** та натиснемо **ОК**.

Розв'язок задачі показано на рисунку 6.7. Оптимальні загальні транспортні витрати дорівнюють 47700 грн.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Оптимізація плану перевезень на транспортній мережі									
2										
3	Вихідні дані									
4	i	b(i)	j, a(j)							
5			1	2	3	4	5	6	7	
6			1500	0	1000	0	300	0	0	
7	1	0	20000	20	10	20000	20000	20000	20000	
8	2	0	20000	20000	20000	15	8	20000	20000	
9	3	0	6	20000	20000	5	20000	20000	12	
10	4	0	20000	20000	20000	20000	20000	8	20	
11	5	0	20000	3	20000	9	20000	11	20000	
12	6	1900	20000	20000	20000	10	20000	20000	5	
13	7	800	20000	20000	20000	20000	20000	20000	20000	
14			c(I, j)							
15										
16	План перевезень									
17	Відправник	Власне споживання	Отримувач, наявний запас							Разом
18			1	2	3	4	5	6	7	
19			1500	0	1000	0	300	0	0	
20	1	0	0	0	1400	0	0	0	0	1400
21	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
22	3	0	0	0	0	1600	0	0	800	2400
23	4	0	0	0	0	0	0	1600	0	1600
24	5	0	0	0	0	0	0	300	0	300
25	6	1900	0	0	0	0	0	0	0	1900
26	7	800	0	0	0	0	0	0	0	800
27	Разом		1500	0	2400	1600	300	1900	800	
28										
29	Загальні транспортні витрати			47700						

Рис. 6.7. Результати розв'язування багатоступінної транспортної задачі на комп'ютері

Знайдений план перевезень продукції показано також на рисунку 6.8. На ньому у вершинах додатними числами позначено запас продукції у відповідного постачальника, а від'ємними – попит на цю продукцію з боку відповідного споживача (зазначені обсяги записано у дужках). Ненульові обсяги перевезень продукції за задіяними маршрутами записано над відповідними дугами.

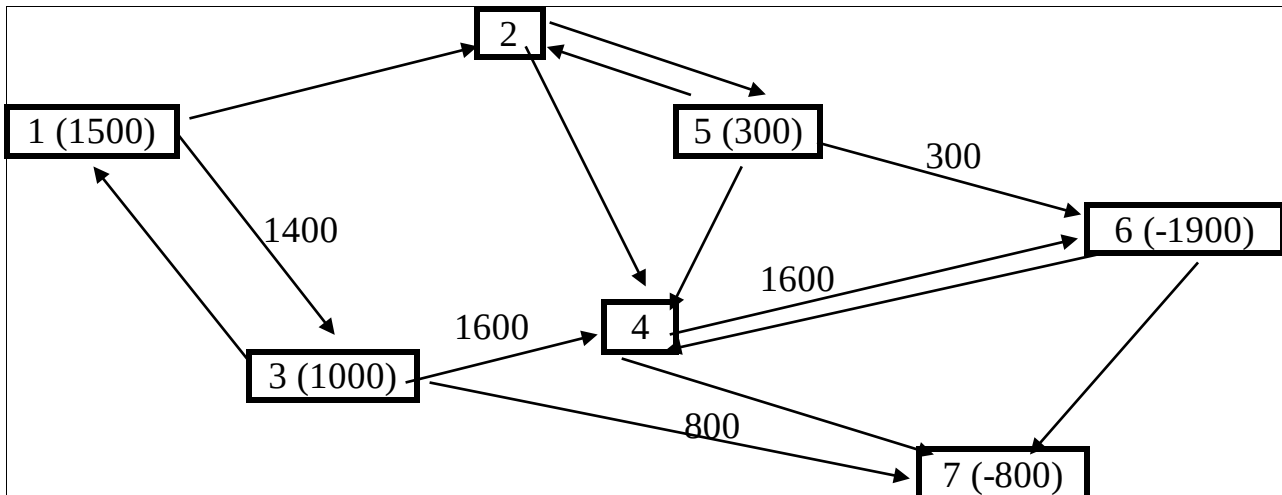


Рис. 6.8. Оптимальний план перевезень продукції

З рисунку 6.8 видно, що з пункту 1 слід взяти лише 1400 одиниць продукції, яку надіслати до пункту 3. Пункт 3, який є початковим та містить 1000 одиниць продукції, виконує також роль транзитного пункту, оскільки через нього буде перевезено 1000 одиниць продукції, яка надійде з пункту 1. Отже, з пункту 3 буде відправлено 1600 одиниць продукції до пункту 4 (транзитного) і далі – до пункту 6, та 800 одиниць продукції до пункту 7, який є кінцевим. Нарешті, до кінцевого пункту 6, крім 1600 одиниць продукції з транзитного пункту 4, надійде ще 300 одиниць продукції з початкового пункту 5. Зазначений план перевезення продукції від постачальників до споживачів є оптимальним. Мінімальні загальні транспортні витрати складають, як вже зазначалося, 47700 грн.

6.4. Завдання для самостійного опрацювання

1. Як зміниться оптимальний план перевезень пального у двохетапній транспортній задачі (підрозділ 6.2), якщо:

а) пропускна спроможність першого розподільчого пункту скоротиться до 100 т, а другого – збільшиться до 200 т?

б) обсяги запасів пального у сховищах складатимуть: C_1 – 65 т, C_2 – 75 т, C_3 – 95 т?

2. Враховуючи нові пропускні спроможності розподільчих пунктів та обсяги запасів пального на сховищах (пункти "а" та "б" завдання 1) визначити, як зміняться оптимальний план перевезень та загальні

транспортні витрати, якщо вартість перевезень у 10-тонних цистернах зросте на 10%, а вартість перевезень у 5-тонних цистернах зменшиться на 10%?

3. Побудувати граф транспортної системи маршрутів та знайти оптимальний план багатоетапної транспортної задачі за даними, що наведені у таблиці 6.4.

Таблиця 6.4

Вихідні дані до багатоетапної транспортної задачі

a_j – запас продукції в j -му пункті

b_i – попит на продукції в i -му пункті

c_{ij} – транспортний тариф за маршрутом $i \rightarrow j$

i, b_i		j, a_j							
		1	2	3	4	5	6	7	8
		1000	0	0	0	1500	0	0	2000
1	0		10				20		
2	600	15		20			15		
3	0		30		20				
4	1100					15			
5	0			30	10			15	30
6	700	10			40			30	20
7	1400					20	40		50
8	0					20			
		c_{ij}							

(Зафарбовані клітинки означають відсутність безпосереднього транспортного сполучення між відповідними пунктами транспортної мережі)

РОЗДІЛ 7. ДОПОМІЖНІ ОПТИМІЗАЦІЙНІ ЗАДАЧІ НА ТРАНСПОРТНІЙ МЕРЕЖІ

З використанням графа транспортної системи маршрутів, який ми побудували у підрозділі 6.3, розв’язуються не лише задачі про оптимізацію плану перевезень продукції від заданих постачальників до споживачів, а також інші оптимізаційні задачі логістики. Це, зокрема, задачі про визначення найдешевшого (в іншій постановці – найкоротшого) транспортного маршруту між заданими двома несуміжними пунктами транспортної мережі, задачі про визначення максимально можливого обсягу перевезень з одного пункту до іншого, з урахуванням пропускних спроможностей окремих сегментів транспортної мережі тощо. Ми назвали ці задачі допоміжними, оскільки вони часто є лише підзадачами значно складніших логістичних задач.

- 7.1. Визначення найдешевшого транспортного маршруту між заданими двома несуміжними пунктами транспортної мережі
- 7.2. Визначення максимального потоку від одного до іншого несуміжних пунктів транспортної мережі
- 7.3. Завдання для самостійного опрацювання

7.1. Визначення найдешевшого транспортного маршруту між заданими двома несуміжними пунктами транспортної мережі

Постановка задачі (приклад). Є транспортна мережа, якою можна альтернативними маршрутами перевезти вантаж з пункту 1 до пункту 8 через деякі проміжні пункти. Усі проміжні пункти занумеровані числами від 2 до 7. Відомі витрати (у гривнях) на перевезення вантажу на кожній окремій ділянці мережі – з відповідного пункту i до певного пункту j , які наведені у таблиці 7.1. /Зафарбована клітинка таблиці означає, що між відповідними пунктами безпосереднє транспортне сполучення відсутнє./

Таблиця 7.1

Витрати на перевезення вантажу
на окремих ділянках транспортної мережі,

гривень

Звідки	Куди						
	2	3	4	5	6	7	8
1	50	90	50				
2				70			
3					50		
4				40	40		60
5						70	
6							60
7							100

Потрібно визначити найекономічніший маршрут перевезення вантажу.

Побудова графа транспортної мережі. Для розв'язування задачі про визначення найекономічнішого маршруту наявну транспортну мережу доцільно подати у вигляді орієнтованого графа. У нашому прикладі граф міститиме 8 вершин, з яких вершина 1 є початковою, вершина 8 – кінцевою, решта 6 вершин – проміжні. Кількість дуг графа відповідає кількості незафарбованих клітинок таблиці 7.1 – таких клітинок 11. Перерахуємо усі дуги:

(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (4, 8), (5, 7), (6, 8) та (7, 8).

Довжина кожної дуги є відомою – вона відповідає витратам на перевезення вантажу на відповідній ділянці транспортної мережі.

Отже, граф транспортної мережі матиме вигляд, як це показано на рисунку 7.1, де над кожною дугою вказано її довжину. Потрібно знайти найкоротший шлях від вершини 1 до вершини 8.

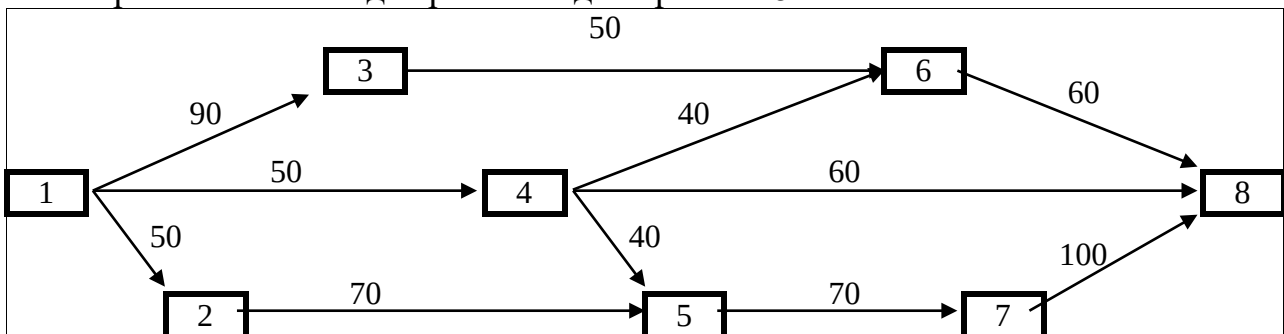


Рис. 7.1. Граф транспортної мережі

Формалізація задачі (загальний випадок). Нехай маємо граф транспортної мережі, який містить n вершин, позначених натуральними числами від 1 до n , та множину дуг, позначену через U . Кожна наявна у графі дуга (i, j) означає, що від пункту i до пункту j існує безпосереднє транспортне сполучення. Відома довжина c_{ij} кожної такої дуги.

Вершина 1 є початковою, вершина n – кінцевою, вершини з номерами від 2 до $(n-1)$ – проміжні. Потрібно визначити найкоротший шлях від вершини 1 до вершини n .

Простий спосіб формалізації задачі полягає у такому. Вважатимемо, що у початковій вершині міститься вантаж у кількості 1. Цей вантаж потрібно доставити до кінцевої вершини n .

Уведемо змінні x_{ij} , які показуватимуть кількість вантажу, що перевозитиметься безпосередньо з пункту i до пункту j , $(i, j) \in U$.

Обсяги перевезень повинні задовольняти такі обмеження:

1) з початкової вершини весь вантаж потрібно вивезти:

$$\sum_{j: (1, j) \in U} x_{1j} = 1 \quad (7.1)$$

2) в кожній j -й проміжній вершині весь вантаж, який до неї надходить, потрібно відправити далі:

$$\sum_{i:(i,j) \in U} x_{ij} = \sum_{k:(j,k) \in U} x_{jk}, \quad 2 \leq j \leq n-1 \quad (7.2)$$

3) весь вантаж потрібно завезти до кінцевої вершини:

$$\sum_{i:(i,n) \in U} x_{in} = 1 \quad (7.3)$$

4) вантаж є неподільним:

$$x_{ij} \in \{0; 1\}, \quad (i, j) \in U \quad (7.4)$$

Позначимо через z загальні витрати на перевезення вантажу, тобто довжину шляху від вершини 1 до вершини n . Тоді цільова функція задачі про визначення найекономічнішого маршруту матиме вигляд:

$$z = \sum_{(i,j) \in U} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (7.5)$$

Задача (7.1) – (7.5) математично є задачею лінійного програмування з логічними змінними.

Оскільки задачі з логічними або цілочисловими змінними розв'язувати складніше, аніж задачі з неперервними змінними, візьмемо до уваги, що обмеження $x_{ij} \leq 1$ є надлишковими, а вимоги цілочисловості цих змінних виконуватимуться автоматично, якщо задачу (7.1) – (7.5) звести до транспортної та розв'язувати за методом потенціалів.

Зведення задачі до транспортної полягає, зокрема, у поданні плану перевезень повною квадратною матрицею $X = \|x_{ij}\|_{(n)}$ та заборонаю перевезень за фіктивними маршрутами (i, j) , відсутніми на графі транспортної мережі. Ввести цю заборону можна або покладанням вартості перевезень за фіктивними маршрутами надзвичайно великому числу, як це було зроблено у підрозділі 6.3, або явно – введенням відповідних обмежень на усі фіктивні перевезення:

$$x_{ij} = 0 \quad \text{для всіх } (i, j) \notin U \quad (7.6)$$

Якщо оптимальний план задачі лінійного програмування (7.1), (7.2), (7.3), (7.5) і (7.6) з додатковою вимогою невід'ємності змінних міститиме лише цілочислові (0 або 1) компоненти, задачу визначення найекономічнішого маршруту буде розв'язано. У супротивному випадку, коли після серії запусків інструменту "Поиск решения" серед компонентів оптимального плану лишатимуться дробові, залишається спробувати запустити цей інструмент з явною вказівкою щодо цілочисловості основних змінних задачі.

Необхідною і достатньою умовою існування розв'язку задачі про визначення найекономічнішого маршруту є наявність на графі транспортної мережі принаймні одного маршруту, який з'єднував би початкову вершину з кінцевою. Для перевірки цієї умови часто досить обмежитися візуальним аналізом графа транспортної мережі.

Розв'язування задачі про визначення найдешевшого транспортного маршруту на комп'ютері. Опрацюємо задачу з вихідними даними, наведеними у таблиці 7.1. Відкриємо робочу книгу Excel

"Marshrut.xls" та у клітинках A1:H1 (об'єднуємо їх) впишемо назву задачі: "Визначення найдешевшого маршруту".

Блок клітинок A3:H12 відведемо для вихідних даних з таблиці 7.1. Зафарбовані клітинки відповідають випадкам, коли безпосереднє транспортне сполучення від пункту i до пункту j відсутнє. Раніше (підрозділ 6.3) в такі клітинки ми заносили значно велике число. Зараз скористаємося іншим способом. Залишимо ці клітинки незаповненими (Excel сприйматиме незаповнену клітинку як клітинку з нульовим значенням), але потім в обмеженнях вимагатимемо, щоб обсяги перевезень на відповідних ділянках транспортної мережі дорівнювали нулю.

Для інформації про план перевезень відведемо блок клітинок A14:H23. Звертаємо увагу, що до початкової вершини 1 не входить жодна дуга, а з кінцевої вершини 8 не виходить жодна дуга (рис. 7.1). Тому для відбиття плану перевезень замість повної квадратної матриці $X = \|x_{ij}\|_{(8)}$ можна з цієї матриці відкинути перший стовпчик та восьмий рядок. Отже, за формою інформаційний блок A14:H23 є копією блоку A3:H12. Значення змінних – про обсяги перевезень за окремими маршрутами – міститимуться у клітинках B17:H23.

Стовпчик I17:I23 відведемо для підсумовування елементів відповідного рядка від колонок B до H включно. Знайдені у цих клітинках за допомогою функцій підсумовування значення відповідатимуть: у клітинці I17 – лівій частині обмеження (7.1); у клітинках I18: I23 – правим частинам обмежень (7.2).

Рядок B24:H24 теж відведемо для допоміжних сум елементів відповідного стовпчика у рядках з 17-го по 23-й. Тоді у клітинках B24:G24 значення відповідатимуть лівим частинам обмежень (7.2), а в клітинці H24 – лівій частині обмеження (7.3).

У клітинках A26:C26 створимо інформаційний блок про загальні витрати. Для цього об'єднаємо клітинки A26:B26 та зафіксуємо в них назву цільового показника: "Загальні витрати", а в клітинку C26 впишемо формулу для його обчислення:

$$=\text{СУММПРОИЗВ}(B6:H12;B17:H23)$$

Підготовку робочого аркушу закінчено.

Далі в меню **“Сервис”** оберемо команду **“Поиск решения”** та в полі **“Установить целевую ячейку”** діалогового вікна інструменту пошуку рішення вкажемо на адресу цільової клітинки: $\$C\26 .

Перемикач вибору оптимізаційного спрямування цільової функції ввімкнемо у положення **“минимальному значению”**.

У полі **“Изменяя ячейки”** вкажемо на адреси клітинок із усіма змінними, які відповідають обсягам перевезень: $\$B\$17:\$H\23 .

Потім вводитимемо обмеження задачі. Натискаючи кнопку **“Добавить”**, послідовно вноситимемо:

а) основні обмеження, що відповідають вимогам (7.1), (7.2), (7.3):

$\$I\17	=	1
-----------	---	---

\$I\$18:\$I\$23	=	\$B\$24:\$G\$24
-----------------	---	-----------------

\$H\$24	=	1
---------	---	---

б) допоміжні обмеження, згідно вимог (7.6) – потрібно занулити значення змінних, що відповідають обсягам перевезень за фіктивними маршрутами. Вони містяться у зафарбованих клітинках B18:D23, E17:H17, F18:H18, E19, G19:H19, G20, E21:F23, H21 та G22:G23.

Далі зазначимо **параметри** пошуку рішення: “**Линейная модель**”, “**Неотрицательные переменные**” та послідовно натиснемо кнопки “**ОК**” і “**Выполнить**”.

У вікні “**Результаты поиска решения**” увімкнемо перемикач “**Сохранить найденное решение**” та натиснемо **ОК**.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Визначення найдешевшого маршруту								
2									
3	Витрати на перевезення на окремих ділянках								
4	Звідки	Куди							
5		2	3	4	5	6	7	8	
6	1	50	30	50					
7	2				70				
8	3					50			
9	4				40	40		60	
10	5						70		
11	6							60	
12	7							100	
13									
14	План перевезень								
15	Звідки	Куди							
16		2	3	4	5	6	7	8	Разом
17	1	0	0	1	0	0	0	0	1
18	2	0	0	0	0	0	0	0	0
19	3	0	0	0	0	0	0	0	0
20	4	0	0	0	0	0	0	1	1
21	5	0	0	0	0	0	0	0	0
22	6	0	0	0	0	0	0	0	0
23	7	0	0	0	0	0	0	0	0
24	Разом	0	0	1	0	0	0	1	
25									
26	Загальні витрати		110						

Рис. 7.2. Результати розв’язування задачі про визначення найекономічнішого транспортного маршруту з пункту 1 до пункту 8

Розв'язок задачі показано на рисунку 7.2. Найекономічніший маршрут складається з дуг (1, 4) та (4, 8). Витрати на перевезення вантажу з пункту 1 до пункту 8 за цим маршрутом є мінімально можливими, вони дорівнюють 110 грн., про що засвідчує значення у клітинці C26.

7.2. Визначення максимального потоку від одного до іншого несуміжних пунктів транспортної мережі

Постановка та економіко–математична модель задачі. Нехай маємо граф транспортної мережі, який містить n вершин, позначених натуральними числами від 1 до n , та множину дуг, позначену через U . Вершина 1 є початковою, вершина n – кінцевою. Інші вершини – проміжні. Кожна наявна у графі дуга (i, j) означає, що від пункту i до пункту j існує безпосереднє транспортне сполучення. Відома пропускна спроможність d_{ij} кожної такої дуги. Із пункту 1 деяка продукція починає усіма можливими маршрутами перевозитися до пункту n , утворюючи так званий потік. Потрібно, враховуючи топологію транспортної мережі та пропускні спроможності кожної ділянки мережі, визначити максимально можливий розмір такого потоку.

Позначимо через x_{ij} обсяг продукції, що перевозитиметься безпосередньо з пункту i до пункту j , $(i, j) \in U$, через y – розмір потоку продукції, та перейдемо до побудови економіко–математичної моделі.

Цільова функція відбиватиме вимогу максимізації розміру потоку:

$$y \rightarrow \max \quad (7.7)$$

Обмеження задачі враховують наступні вимоги:

1) спочатку весь потік міститься у вершині 1, з якої всю продукцію потрібно вивезти:

$$y = \sum_{j: (1, j) \in U} x_{1j} \quad (7.8)$$

2) в кожній j -й проміжній вершині вся продукція, яка до неї надходить, має бути відправленою далі:

$$\sum_{i: (i, j) \in U} x_{ij} = \sum_{k: (j, k) \in U} x_{jk}, \quad 2 \leq j \leq n-1 \quad (7.9)$$

3) весь потік продукції повинен надійти до кінцевої вершини:

$$y = \sum_{i: (i, n) \in U} x_{in} \quad (7.10)$$

4) на кожній з дуг обсяги перевезень невід'ємні та обмежені пропускними спроможностями цих дуг:

$$0 \leq x_{ij} \leq d_{ij}, \quad (i, j) \in U \quad (7.11)$$

Модель (7.7) – (7.11) є задачею лінійного програмування. Необхідною умовою існування її розв'язку є наявність на графі транспортної мережі принаймні одного маршруту від початкової до кінцевої вершини. Достатньою – додатково – наявність у графі принаймні одного перерізу, всі

дуги якого мають обмежені пропускні спроможності. /Перерізом графа називається така підмножина його дуг, відкидання якої унеможливило б маршрут від початкової до кінцевої вершини./

Приклад. Є транспортна мережа (рис. 7.3), якою потрібно перевозити продукцію з пункту 1 до пункту 8 через відповідні проміжні пункти.

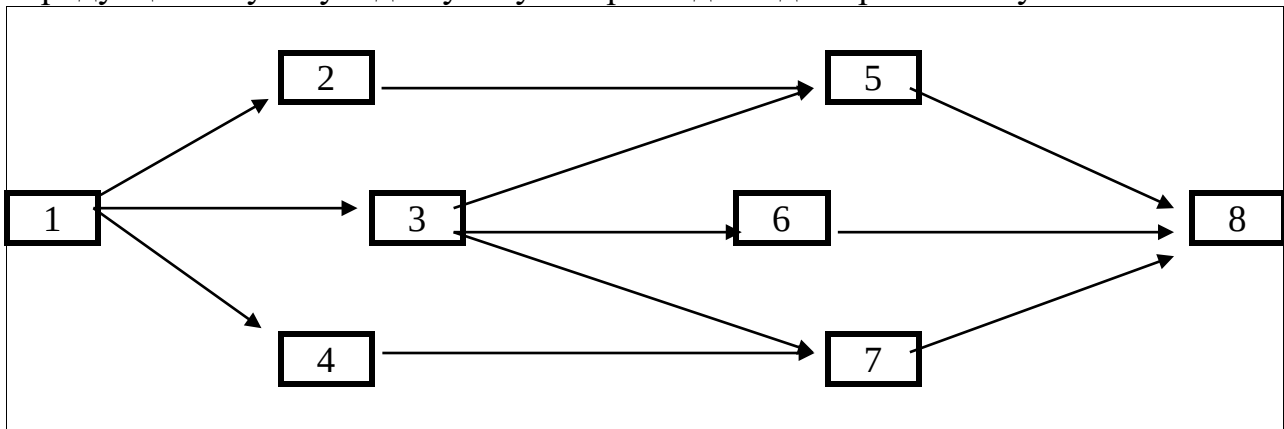


Рис. 7.3. Граф транспортної мережі

Усі проміжні пункти занумеровані числами від 2 до 7. Відомі пропускні спроможності щодо перевезення цієї продукції на кожній окремій ділянці мережі – з відповідного пункту i безпосередньо до певного пункту j – які наведено у таблиці 7.2 (зафарбована клітинка таблиці означає, що безпосереднє перевезення продукції між відповідними пунктами неможливе).

Таблиця 7.2

Звідки	Куди						
	2	3	4	5	6	7	8
1	100	150	200				
2				160			
3				140	170	160	
4						220	
5							180
6							230
7							200

Знайти, який максимальний обсяг продукції можна перевезти з пункту 1 до пункту 8, якщо враховувати пропускні спроможності кожної окремої ділянки мережі.

Розв’язування задачі про визначення максимального потоку на комп’ютері. Відкриємо робочу книгу Excel "Potik.xls" та у клітинках A1:H1 (об’єднуємо) запишемо назву задачі: "Визначення максимального потоку".

Блок клітинок A3:H12 відведемо для вихідних даних з таблиці 7.2 про пропускні спроможності дуг. Зафарбовані клітинки відповідають випадкам, коли безпосереднє транспортне сполучення від пункту i до пункту j відсутнє. Залишимо ці клітинки незаповненими – Excel сприйматиме їх як клітинки з нульовими значеннями.

Для інформації про план перевезень відведемо блок клітинок A14:H23. За формою він є копією блоку A3:H12. Значення змінних – про обсяги перевезень за окремими маршрутами – міститимуться у клітинках B17:H23.

Стовпчик I17:I23 відведемо для підсумовування елементів відповідного рядка від колонок В до Н включно. Знайдені у цих клітинках за допомогою функцій підсумовування значення відповідатимуть: у клітинці I17 – розміру вихідного потоку, який обчислюється за формулою (7.8); у клітинках I18: I23 – правим частинам обмежень (7.9).

Рядок В24:H24 теж відведемо для допоміжних сум елементів відповідного стовпчика у рядках з 17-го по 23-й. У клітинках В24:G24 значення відповідатимуть лівим частинам обмежень (7.9), а в клітинці H24 – кінцевому потоку, який визначається формулою (7.10).

У клітинках A26:C26 створимо інформаційний блок про розмір потоку. Для цього об'єднаємо клітинки A26:B26 та запишемо в них назву цільового показника: "Розмір потоку", а в клітинку C26 впишемо формулу для його обчислення: = I17.

Оберемо в меню **“Сервис”** команду **“Поиск решения”** та в полі **“Установить целевую ячейку”** діалогового вікна інструменту пошуку рішення вкажемо на адресу цільової клітинки: \$C\$26.

Перемикач вибору оптимізаційного спрямування цільової функції ввімкнемо у положення **“максимальному значенню”**.

У полі **“Изменяя ячейки”** вкажемо на адреси клітинок із усіма змінними, які відповідають обсягам перевезень: \$B\$17:\$H\$23.

Тепер введемо обмеження задачі:

1)

\$I\$17	=	\$H24
---------	---	-------

– відповідає одночасно вимогам (7.8) та (7.10);

2)

\$I\$18:\$I\$23	=	\$B\$24:\$G\$24
-----------------	---	-----------------

– відповідає вимогам (7.9);

3)

\$B\$17:\$H\$23	<=	\$B\$6:\$H\$12
-----------------	----	----------------

– відповідає вимогам (7.11), а також унеможливорює перевезення за відсутніми на транспортній мережі сполученнями.

Зазначимо **параметри** пошуку рішення: **“Линейная модель”**, **“Неотрицательные переменные”** та послідовно натиснемо кнопки **"ОК"** і **“Выполнить”**.

У вікні **“Результаты поиска решения”** увімкнемо перемикач **“Сохранить найденное решение”** та натиснемо **ОК**.

Розв'язок задачі показано на рисунку 7.4. Розмір максимального потоку дорівнює 450 одиниць продукції (клітинка C26). Знайдені оптимальні обсяги перевезень за маршрутами показані також на рис. 7.5 над кожною дугою; під дугами наведено вихідні дані про пропускні спроможності – вони записані у дужках.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Визначення максимального потоку								
2									
3	Пропускні спроможності дуг								
4	Звідки	Куди							
5		2	3	4	5	6	7	8	
6	1	100	150	200					
7	2				160				
8	3				140	170	160		
9	4						220		
10	5							180	
11	6							230	
12	7							200	
13									
14	План перевезень								
15	Звідки	Куди							
16		2	3	4	5	6	7	8	Разом
17	1	100	150	200	0	0	0	0	450
18	2	0	0	0	100	0	0	0	100
19	3	0	0	0	0	150	0	0	150
20	4	0	0	0	0	0	200	0	200
21	5	0	0	0	0	0	0	100	100
22	6	0	0	0	0	0	0	150	150
23	7	0	0	0	0	0	0	200	200
24	Разом	100	150	200	100	150	200	450	
25									
26	Розмір потоку		450						

Рис. 7.4. Робочий лист Excel з умовами та результатами розв'язування прикладу визначення максимального потоку у транспортній мережі

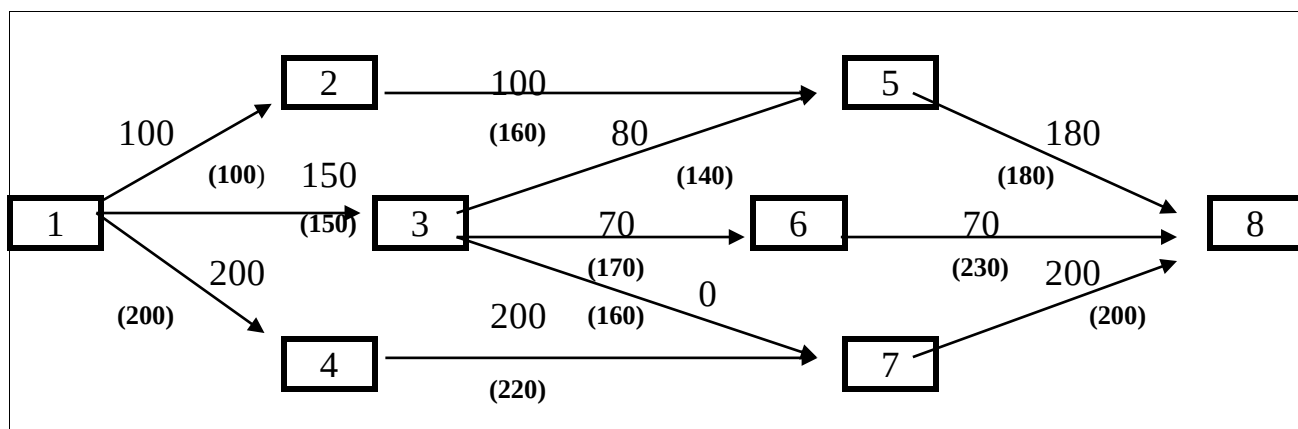


Рис. 7.5. Максимальний потік транспортної мережі

7.3. Завдання для самостійного опрацювання

1. Знайти найкоротший транспортний маршрут від вершини 1 до вершини 12 на транспортній мережі, граф та довжини (у кілометрах) окремих ділянок якої наведено на рисунку 7.6.

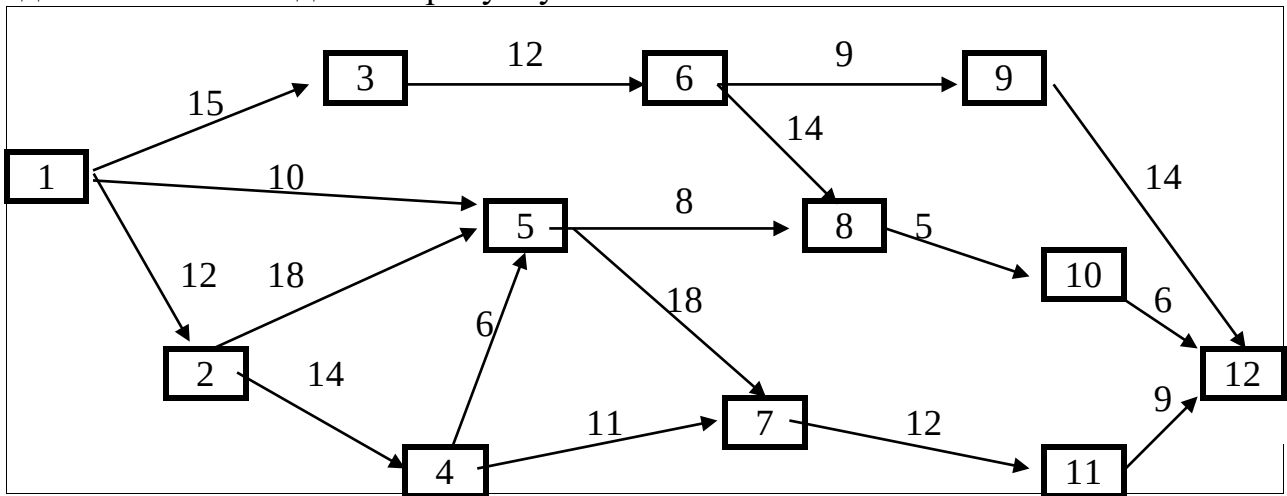


Рис. 7.6. Граф транспортної мережі та довжини його дуг

2. Яким буде найкоротший маршрут з вершини 1 до вершини 12 (завдання 1, рис. 7.6), якщо транспортні сполучення між окремими пунктами з односторонніх замінити на двосторонні (тобто замість кожної дуги (i, j) ввести до розгляду дві дуги: (i, j) та (j, i))?

3. Знайти максимальний потік продукції від пункту 1 до пункту 10 на транспортній мережі, граф та пропускні спроможності окремих ділянок якої наведені на рисунку 7.7.

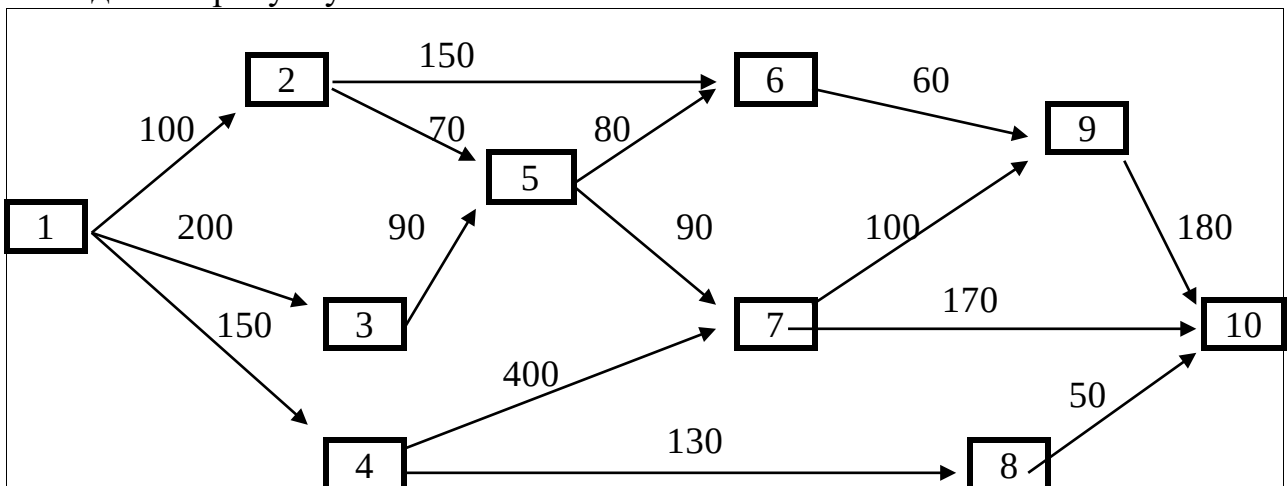


Рис. 7.7. Граф транспортної мережі та пропускні спроможності його дуг

4. Чи зміниться розмір максимального потоку (завдання 3, рис. 7.7), якщо пропускну спроможність пункту 5 обмежити до 100 одиниць продукції?

РОЗДІЛ 8. ОПТИМАЛЬНИЙ ВИБІР МІСЦЯ РОЗТАШУВАННЯ РОЗПОДІЛЬЧОГО ЦЕНТРУ

Перевезення продукції від постачальників до споживачів може здійснюватися через розподільчі центри – один або декілька. Такими центрами можуть бути або регіональні сховища продукції (наприклад, при транспортуванні пального), або діагностичні центри (наприклад, при перевезенні автомобільних моторів на автозаводи) тощо. Виникає задача: де саме слід якнайкраще розташувати такі розподільчі центри?

Розрізнятимемо два типи задач оптимального вибору місця розташування розподільчого центру:

1) задачі з неперервними змінними, в яких невідомими виступають координати розподільчого центру;

2) задачі з логічними змінними, коли потрібно визначити найкращий варіант розташування розподільчого центру із множини кількох альтернативних можливих варіантів.

Опрацюємо ці оптимізаційні логістичні задачі на конкретних прикладах.

9.1. Вибір оптимального місця розташування сховища пального

9.2. Визначення оптимального місця розміщення нового проміжного розподільчого центру – вузлу транспортної мережі

9.3. Завдання для самостійного опрацювання

8.1. Вибір оптимального місця розташування сховища пального

Постановка та економіко–математична модель задачі. Вздовж траси Київ–Одеса розташовано 8 автозаправних станцій (АЗС) фірми “Нафтогаз”. Відомо, на якому кілометрі траси знаходиться кожна АЗС, та який середній щодобовий продаж пального на цій станції (таблиця 8.1).

Таблиця 8.1

Вихідна інформація про автозаправні станції

Номер АЗС	1	2	3	4	5	6	7	8
На якому кілометрі розташована АЗС	30	50	60	90	120	150	180	200
Середній щодобовий продаж пального, тон	15	10	20	15	25	10	30	40

Фірма планує для забезпечення паливом усіх АЗС побудувати єдиний розподільчий центр. На якому саме кілометрі траси доцільно розташувати цей центр, якщо за критерій оптимальності обрано вимогу мінімізувати загальний обсяг перевезень пального (у тонно–кілометрах) від розподільчого центру до усіх АЗС?

Позначимо через x координати розподільчого центру (на трасі Київ–Одеса, в кілометрах), а через y – загальний обсяг перевезень пального від розподільчого центру до всіх АЗС (в тонно–кілометрах). Ці змінні є невідомими та підлягають визначенню.

Уведемо також позначення для відомих величин: n – кількість автозаправних станцій, a_j – координати j -ї АЗС на трасі Київ–Одеса (в кілометрах), b_j – середній щодобовий попит (у тонах) на пальне з боку j -ї АЗС ($j=1, n$).

За наведених позначень економіко–математична модель задачі вибору оптимального місця розташування сховища пального набирає вигляду:

$$y = \sum_{j=1}^n b_j \cdot |x - a_j| \rightarrow \min \quad (8.1)$$

де через $|x - a_j|$ показано відстань (у кілометрах) від сховища до j -ї АЗС.

Маємо задачу одновимірної безумовної оптимізації з неперервною змінною. Цільова функція задачі є нелінійною, оскільки для обчислення її значень потрібно скористатися функцією обчислення абсолютної величини.

Задача має розв'язок, для знаходження якого скористаємося інструментом "Поиск решения" Excel.

Розв'язування задачі на комп'ютері. Відкриємо нову робочу книгу Excel під назвою "Shoviche.xls". Об'єднаємо клітинки A1:I1 та запишемо у них назву задачі: "Визначення координат сховища пального".

Блок клітинок A3:I6 відведемо для вихідної інформації про АЗС – таблиці 8.1.

Інформаційний блок про координати сховища розмістимо у клітинках A8:C8. Об'єднаємо клітинки A8 і B8 та запишемо в них назву показника: "Координати сховища", а клітинку C8 залишимо для значення цього показника.

Блок клітинок A10:I10 відведемо для допоміжної розрахункової інформації про відстані від сховища до кожної АЗС. Для цього у клітинку A10 впишемо назву: "Відстань від сховища до АЗС", а в клітинку B10 введемо розрахункову формулу:

$$=ABS(\$C\$8-B5)$$

Зараз ми використали вбудовану в Excel стандартну математичну функцію обчислення абсолютної величини – "ABS()" – причому в записі аргументу зафіксували адресу клітинки з координатою сховища (\$C\$8). Це дозволяє у клітинки C10:I10 занести потрібні аналогічні формули шляхом "протягування" формули з клітинки B10.

Нарешті в клітинках A12:D12 побудуємо інформаційний блок про загальний обсяг перевезень пального зі сховища до всіх АЗС. Назву цього цільового показника впишемо у клітинки A12:C12, а в клітинку D12 запишемо потрібну розрахункову формулу:

$$=СУММПРОИЗВ(B6:I6;B10:I10)$$

На цьому підготовку робочого аркушу закінчено.

Оберемо в меню “Сервис” команду “Поиск решения”. В полі “Установить целевую ячейку” діалогового вікна інструменту пошуку рішення вкажемо адресу цільової клітинки: \$D\$12.

Перемикач вибору оптимізаційного спрямування цільової функції ввімкнемо у положення “минимальному значению”.

У полі “Изменяя ячейки” вкажемо адресу клітинки із незалежною змінною, яка є координатою розподільчого центру: \$C\$8.

Обмеження в задачі відсутні, тому одразу ж натиснемо кнопку “Выполнить”.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Визначення координат сховища пального								
2	Інформація про АЗС								
3									
4	Номер АЗС	1	2	3	4	5	6	7	8
5	На якому кілометрі	30	50	60	90	120	150	180	200
6	Попит на пальне	15	10	20	15	25	10	30	40
7	Координати сховища								
8									
9	Відстань від сховища до АЗС								
10									
11	Загальний обсяг перевезень								
12									

Рис. 8.1. Результати розв’язування на комп’ютері задачі про визначення місця розташування сховища пального

Розв’язок задачі показано на рисунку 8.1. Якщо розподільчий центр розмістити на 120-му кілометрі траси, загальний обсяг перевезень пального зі сховища до всіх автозаправних станцій буде мінімальним та дорівнюватиме 9000 тонно-кілометрів. В усіх інших випадках обсяг перевезень пального буде вищим, що проілюстровано на рисунку 8.2.

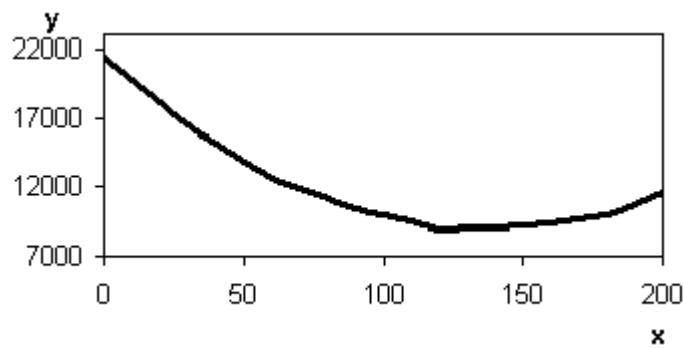


Рис. 8.2. Залежність загального обсягу перевезень пального y від координати розподільчого центру x : найменшому обсягу $y^* = 9000$ т відповідає координата $x^* = 120$ км

8.2. Визначення оптимального місця розміщення нового проміжного розподільчого центру – вузлу транспортної мережі

Постановка задачі. Перспективні щомісячні потреби двох фабрик Φ_1 і Φ_2 у сировині складають, відповідно, 50 і 70 тон. Цей попит буде забезпечено двома постачальниками Π_1 і Π_2 , виробничі потужності яких з виготовлення сировини дорівнюють, відповідно, 40 і 80 тон на місяць. Сировина від постачальників на фабрики перевозиться через проміжний розподільчий центр, розташований у пункті А. Пропускна спроможність цього розподільчого центру дорівнює 70 тон на місяць і не відповідає потужності перспективного потоку сировини. Тому вирішено обладнати ще один розподільчий центр з пропускнуою спроможністю до 80 тон сировини на місяць. Альтернативними місцями розташування нового вузлу транспортної мережі є пункти В і С. Витрати (у гривнях) на перевезення 1 т сировини від кожного з постачальників до кожного з проміжних пунктів А, В або С наведені в таблиці 8.2, а з кожного проміжного пункту на кожну фабрику – у таблиці 8.3.

Таблиця 8.2

Транспортні тарифи на першому етапі перевезень сировини

Постачальник	Проміжний пункт		
	А	В	С
Π_1	120	150	100
Π_2	200	130	110

Таблиця 8.3

Транспортні тарифи на другому етапі перевезень сировини

Проміжний пункт	Фабрика	
	Φ_1	Φ_2
А	150	180
В	170	220
С	250	200

У якому з проміжних пунктів транспортної мережі – В або С – доцільно розмістити новий розподільчий центр (рис. 8.3), щоб загальні транспортні витрати на перевезення всієї сировини були мінімальними?

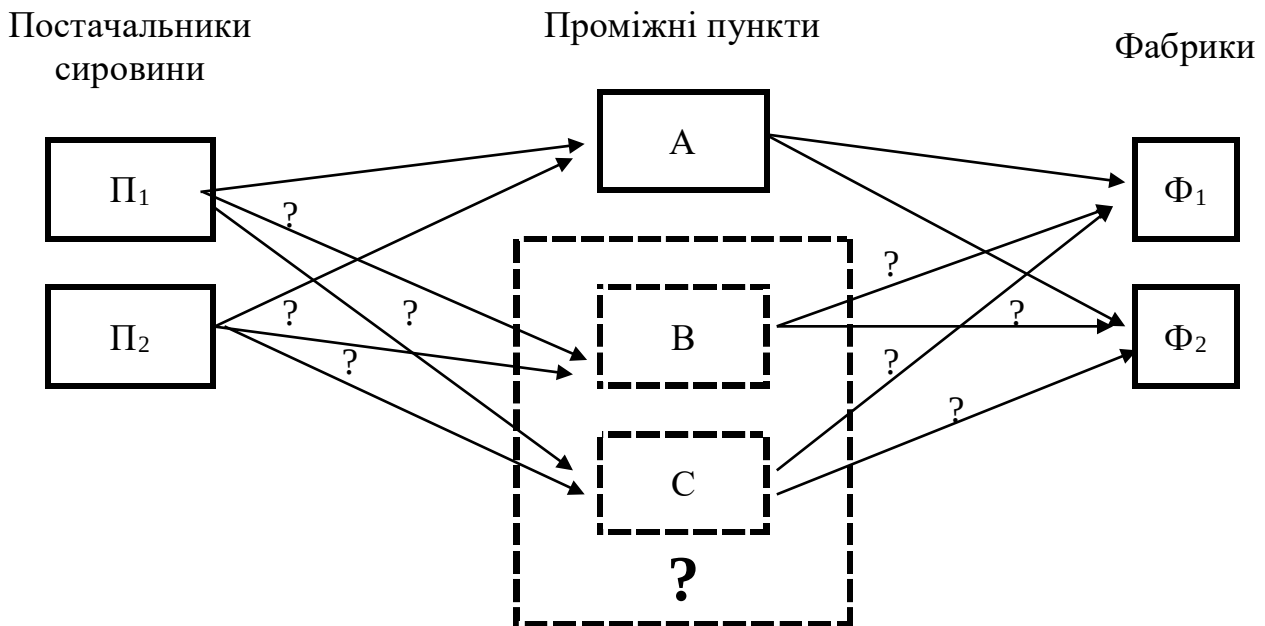


Рис. 8.3. Ілюстрація до умов задачі про визначення оптимального місця розміщення нового проміжного розподільчого центру

Побудова економіко-математичної моделі. Позначимо номер постачальника сировини через i ($i=1, 2$), номер фабрики – споживача цієї сировини – через j ($j=1, 2$), номер проміжного пункту – через k ($k=1, 2, 3$).

Обсяги перевезень сировини на першому етапі – від i -го постачальника до k -го проміжного пункту – позначимо через x_{ik} , а на другому етапі – з k -го проміжного пункту до j -го споживача – через y_{kj} .

Уведемо також дві логічні змінні z_2 і z_3 , які значеннями 1 або 0 відбиватимуть факт розміщення нового розподільчого центру, відповідно, у проміжних пунктах B або C транспортної мережі:

$$z_2 = \begin{cases} 1, & \text{якщо новий розподільчий центр} \\ & \text{розміщатиметься у пункті } B \\ 0, & \text{у супротивному випадку} \end{cases}$$

$$z_3 = \begin{cases} 1, & \text{якщо новий розподільчий центр} \\ & \text{розміщатиметься у пункті } C \\ 0, & \text{у супротивному випадку} \end{cases}$$

Через u позначимо загальні транспортні витрати на перевезення сировини від постачальників до споживачів.

За наведених позначень невідомих економіко-математична модель задачі визначення оптимального місця розміщення нового проміжного розподільчого центру набирає вигляду:

$$u = 120x_{11} + 150x_{12} + 100x_{13} + 200x_{21} + 130x_{22} + 110x_{23} + 150y_{11} + 180y_{12} + 170y_{21} + 220y_{22} + 250y_{31} + 200y_{32} \rightarrow \min \quad (8.2)$$

– загальні транспортні витрати на перевезення сировини слід мінімізувати за обмежень:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 40 \quad (8.3)$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 80 \quad (8.4)$$

– обсяги вивезення сировини від постачальників не повинні перевищувати їх виробничих потужностей;

$$x_{11} + x_{21} = y_{11} + y_{12} \leq 70 \quad (8.5)$$

$$x_{12} + x_{22} = y_{21} + y_{22} \leq 80z_2 \quad (8.6)$$

$$x_{13} + x_{23} = y_{31} + y_{32} \leq 80z_3 \quad (8.7)$$

– всі сировина, яка завозитиметься на проміжний пункт, повинна бути надісланою споживачам, причому потік продукції не повинен перевищувати пропускної спроможності відповідного розподільчого центру: умова (8.5) – щодо наявного розподільчого центру в пункті А; умови (8.6) і (8.7) – щодо пунктів В і С, якщо новий розподільчий центр буде розміщено у відповідному пункті;

$$z_2 + z_3 = 1 \quad (8.8)$$

– новий розподільчий центр розміщуємо лише в одному з пунктів: або в В, або в С;

$$y_{11} + y_{21} + y_{31} = 50 \quad (8.9)$$

$$y_{12} + y_{22} + y_{32} = 70 \quad (8.10)$$

– потрібно повністю задовольнити потреби у сировині кожної з фабрик;

$$x_{ik} \geq 0, \quad i=1, 2; \quad k=1, 2, 3 \quad (8.11)$$

$$y_{kj} \geq 0, \quad k=1, 2, 3; \quad j=1, 2 \quad (8.12)$$

$$z_k \in \{0, 1\}, \quad k=2, 3 \quad (8.13)$$

– очевидні вимоги, визначені економічним змістом відповідних невідомих.

Математично задача (8.2) – (8.13) являє собою задачу частково цілочислового лінійного програмування з двома логічними та 12 неперервними змінними. Розв'яжемо її, використовуючи інструмент "Поиск решения" електронної таблиці Excel.

Розв'язування задачі на комп'ютері. Відкриємо нову робочу книгу під назвою "Rozmisch.xls" та звернемося до її аркушу "Лист 1". Об'єднаємо клітинки А1:І1 та запишемо назву задачі: "Визначення місця розміщення розподільчого центру".

В клітинках А3:В7 побудуємо таблицю про потужності постачальників.

В клітинках D3:F8 зробимо таблицю про пропускні спроможності проміжних пунктів: потенційні та фактичні. В пункті А розподільчий центр вже існує, тому його фактична пропускна спроможність збігається з потенційною та складає 70 т сировини. Потенційні спроможності у пунктах В і С дорівнюють потужності нового розподільчого центру – 80 т, але фактичні залежатимуть від того, де саме цей новий розподільчий центр буде

розміщено: або в пункті В, або в пункті С. Тому у клітинку F7 введемо формулу: =E7*C29, враховуючи, що в клітинці E7 міститься розмір потужності нового розподільчого центру, а в клітинці C29 міститиметься значення логічної змінної z_2 , яка значенням 1 відбиватиме факт вибору місця розміщення цього розподільчого центру саме у пункті В, а значенням 0 – супротивну подію. Аналогічно, в клітинку E8 внесемо потенційну пропускну спроможність пункту С, а в клітинку F8 формулу: E8*D29, оскільки в клітинці D29 міститиметься значення логічної змінної z_3 , яка значенням 1 відбиватиме факт вибору місця розміщення нового розподільчого центру у пункті С, а значенням 0 – супротивний випадок.

В клітинках H3:I6 побудуємо таблицю про попит на сировину з боку фабрик–споживачів.

Блок клітинок A10:H16 відведемо для таблиці про питомі тарифи на перевезення сировини на кожному з етапів: на етапі 1 – від постачальників на проміжні пункти, на етапі 2 – з проміжних пунктів до споживачів. У тому числі конкретні числові дані для блоків клітинок B14:D15 і G14:H16 візьмемо з таблиць 8.2 і 8.3, відповідно.

В клітинках A18:H24 побудуємо таблицю про обсяги перевезень за усіма можливими маршрутами. За формою ця таблиця є копією попередньої таблиці про тарифи. Клітинки B22:D23 міститимуть значення змінних про обсяги перевезень на першому етапі, а клітинки G22:H24 – про обсяги перевезень на другому етапі.

Для допоміжних розрахункових показників про обсяги вивезеної від кожного постачальника сировини, про приплив та витік потоків сировини на кожному транзитному пункту, а також про обсяги завезеної на кожен з фабрик сировини відведемо масиви клітинок E22:E23, B24:E24, I22:I24 та G25:H25. В кожен з цих клітинок введемо відповідні формули для підсумовування необхідних значень.

Блок A27:D29 відведемо для таблиці з інформацією про місце розміщення нового розподільчого центру; для значень відповідних логічних змінних відведемо, як вже зазначалося, клітинки C29 і D29.

У клітинку E29 занесемо формулу для підсумовування значень наших логічних змінних.

Нарешті, у клітинках F27:H29 побудуємо таблицю про транспортні витрати. У тому числі:

1) витрати першого етапу перевезень обчислюватимуться в клітинці F29 за формулою:

$$=\text{СУММПРОИЗВ}(B14:D15;B22:D23)$$

2) витрати другого етапу перевезень – в клітинці G29 за формулою:

$$=\text{СУММПРОИЗВ}(G14:H16;G22:H24)$$

3) загальні транспортні витрати – в клітинці H29 (цільовій) – за формулою:

$$=\text{СУММ}(F29;G29)$$

Підготовку робочого аркушу закінчено.

Для подальшого розв'язування задачі з використанням інструменту пошуку рішення Excel оберемо команду **“Поиск решения”** в меню **“Сервис”**.

У діалоговому вікні **“Поиска решения”** в полі **“Установить целевую ячейку”** вкажемо на адресу цільової клітинки: \$H\$29.

Перемикач вибору оптимізаційного спрямування цільової функції ввімкнемо у положення **“минимальному значению”**.

У полі **“Изменяя ячейки”** вкажемо на адреси клітинок з усіма змінними, які відповідають обсягам перевезень сировини за кожним з маршрутів, та логічними змінними, які визначають місце розміщення нового розподільчого центру: \$B\$22:\$D\$23;\$G\$22:\$H\$24;\$C\$29:\$D\$29.

Після цього вводитимемо обмеження задачі. Послідовно, натискаючи кнопку **“Добавить”**, запишемо обмеження:

1) щодо обсягів вивезення сировини від постачальників – (8.3) – (8.4):

\$E\$22:\$E\$23	<=	\$B\$6:\$B\$7
-----------------	----	---------------

2) щодо збігу за обсягами потоків ввезеної та вивезеної сировини у кожному з транзитних пунктів – рівності в (8.5) – (8.7):

\$B\$24:\$D\$24	=	\$I\$22:\$I\$24
-----------------	---	-----------------

3) щодо пропускних спроможностей розподільчих центрів – нерівності в (8.5) – (8.7):

\$I\$22:\$I\$24	<=	\$F\$6:\$F\$8
-----------------	----	---------------

4) щодо вимоги (8.8) розміщення нового розподільчого центру лише в одному з пунктів В або С:

\$E\$29	=	1
---------	---	---

5) щодо повного задоволення потреб у сировині кожної з фабрик – (8.9) – (8.10):

\$G\$25:\$H\$25	=	\$I\$5:\$I\$6
-----------------	---	---------------

6) щодо вимог невід'ємності кожного з обсягів перевезень сировини – (8.11) – (8.12):

\$B\$22:\$D\$23	>=	0
\$G\$22:\$H\$24	>=	0

7) вказівка (8.13) щодо логічних змінних:

\$C\$29:\$D\$29	=	ДВОИЧ
-----------------	---	-------

Усі обмеження задачі враховано. У діалоговому вікні пошуку рішення натиснемо кнопку **“Выполнить”**.

Після завершення пошуку рішення у вікні **“Результаты поиска решения”** увімкнемо перемикач **“Сохранить найденное решение”** та натиснемо **ОК**.

Розв’язок задачі про оптимальний вибір місця розміщення нового розподільчого центру показано на рисунку 8.4.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Визначення місця розміщення розподільчого центру									
2										
3	Потужності постачальників		Пропускні спроможності транзиту			Попит споживачів				
4	Постачальник	Потужність	Проміжний пункт		Пропускна спроможність		Фабрика		Потреба	
5					Потенційна	Фактична			Ф-1	50
6	П-1	40	А		70	70			Ф-2	70
7	П-2	80	В		80	0				
8			С		80	80				
9										
10	Питомі витрати на перевезення сировини									
11	Етап 1					Етап 2				
12			Проміжний пункт					Фабрика		
13	Постачальник		А	В	С	Проміжний пункт		Ф-1	Ф-2	
14	П-1	120	150	100		А	150	180		
15	П-2	200	130	110		В	170	220		
16						С	250	200		
17										
18	Обсяги перевезень сировини									
19	Етап 1					Етап 2				
20			Проміжний пункт					Фабрика		
21	Постачальник		А	В	С	Проміжний пункт		Ф-1	Ф-2	Всього
22	П-1	40	0	0	40	А	50	0		50
23	П-2	10	0	70	80	В	0	0		0
24	Всього	50	0	70		С	0	70		70
25						Всього	50	70		
26										
27			Проміжний пункт			Витрати на перевезення сировини				
28			В	С	Сума	Етап 1	Етап 2	Всього		
29	Місце розміщення нового розподільчого центру (1 - так, 0 - ні)		0	1	1	14500	21500	36000		
30										
31										
32										
33										
34										
35										

Рис. 8.4. Робочий аркуш книги "Rozmisch.xls" з вихідною інформацією та результатами розв’язування задачі про оптимальний вибір місця розміщення нового проміжного розподільчого центру – вузлу транспортної мережі

Оптимальному плану відповідають мінімальні загальні транспортні витрати на перевезення сировини у розмірі 36 тис. гривень, що видно з клітинки Н29. Задачу розв’язано.

8.3. Завдання для самостійного опрацювання

1. Доведіть, що цільова функція (8.1) задачі про оптимізацію місця розташування сховища пального опукла, що ілюструє рис. 8.2.

2. Обґрунтуйте, що обмеження $0 \leq x \leq 200$ щодо значення координати x розподільчого центру є надлишковим, оскільки через опуклість цільової функції (завдання 1) розв'язок x^* задачі безумовної оптимізації (8.1) автоматично задовольнятиме нерівність $0 \leq x^* \leq 200$.

3. Село розташоване вздовж дороги. Формалізуйте задачу про оптимальний вибір місця розташування в селі поштового відділення, наведіть конкретні числові дані та знайдіть розв'язок.

4. Покажіть, знаючи про рівносильність числових нерівностей:

$$|x - a| \leq t \quad \text{та} \quad t \geq x - a \geq -t,$$

що одновимірна нелінійна безумовна задача оптимізації (8.1) може бути зведеною до такої задачі лінійного програмування (багатовимірної, з обмеженнями):

$$\left. \begin{aligned} y = \sum_{j=1}^n b_j t_j &\rightarrow \min \\ t_j &\geq x - a_j \geq -t_j, \quad j = \overline{1, n} \\ t_j &\geq 0, \quad j = \overline{1, n} \end{aligned} \right\} \quad (8.14)$$

Поясніть зміст змінних t_j цієї задачі.

5. Розв'яжіть задачі про оптимізацію місця розташування сховища пального (підрозділ 8.1) та про оптимальний вибір місця розташування в селі поштового відділення (завдання 3) з використанням задачі лінійного програмування (8.14).

6. Як зміниться оптимальний план перевезень сировини (дивись задачу у підрозділі 8.2) та як зростуть загальні транспортні витрати, якщо замість оптимального варіанту розміщення нового розподільчого центру розглянути альтернативний до нього варіант?

7. Виробниче об'єднання має у своєму складі два заводи, де виробляються двигуни, та два заводи, де збираються автомобілі. Заводи з виробництва двигунів розташовані у пунктах А і В. Автомобільні заводи – у пунктах С і D. Було вирішено побудувати два центри діагностики двигунів та надсилати двигуни на збирання лише після діагностики. Виробничі потужності заводів з виробництва двигунів складають, відповідно, 10 тисяч і 25 тисяч двигунів на рік. Виробничі потужності автозаводів – відповідно, 17 і 18 тисяч автомобілів на рік. Потужності одного діагностичного центру – до 20 тис. двигунів на рік. Розмістити діагностичні центри потрібно в двох пунктах (по одному в кожному) з чотирьох можливих: Е, F, G та Н. Двигуни перевозяться партіями по 100 одиниць в кожній. Відомі витрати на перевезення однієї партії двигунів з пунктів А або В до пунктів Е, F, G та Н, а також з пунктів Е, F, G або Н до пунктів С та D (таблиці 8.4, 8.5).

Таблиця 8.4

Витрати на перевезення однієї партії двигунів (100 од.)
від заводів–виготівельників до проміжних пунктів,

гривень

Пункт розташування заводу з виготовлення двигунів	Можливі пункти розміщення нових діагностичних центрів			
	Е	Ф	Г	Н
А	650	800	700	450
В	530	1020	740	380

Таблиця 8.5

Витрати на перевезення однієї партії двигунів (100 од.) з пунктів
можливого розташування діагностичних центрів на автозаводи,

гривень

Можливі пункти розміщення нових діагностичних центрів	Пункт розташування автозаводу	
	С	Д
Е	680	780
Ф	500	640
Г	240	600
Н	450	560

Визначити, в яких саме двох пунктах слід побудувати центри діагностики автодвигунів, щоб загальні витрати виробничого об'єднання на перевезення двигунів – від виготівельників через діагностичні центри на автозаводи – були б мінімальними.

РОЗДІЛ 9. ОПТИМІЗАЦІЯ РІШЕНЬ ЩОДО УПРАВЛІННЯ ЗАПАСАМИ: БАЗОВА ОДНОПРОДУКТОВА ЗАДАЧА

Ключова проблема в управлінні запасами полягає у тому, щоб мінімізувати загальні витрати, пов'язані зі зберіганням запасів, їх поповненням, а також з втратами внаслідок дефіциту. Задачі оптимального управління запасами можна розподілити на однопроводуктові та багатовродуктові. Багатовродуктові задачі розв'язуються, насамперед, заміною їх відповідною кількістю однопроводуктових задач. Але бувають випадки, коли заміна багатовродуктової задачі однопроводуктовими неможлива – наприклад, коли різна продукция зберігається в одному сховищі, місткість якого є принципово обмеженою. Опрацюємо методи розв'язування однопроводуктових та багатовродуктових оптимізаційних задач управління запасами з використанням відповідних економіко–математичних моделей та обчислювальної техніки. Розпочнемо роботу з базової однопроводуктової задачі.

- 9.1. Базова однопроводуктова задача управління запасами; її економіко–математична модель
- 9.2. Аналітичне розв'язування базової однопроводуктової задачі
- 9.3. Приклад: оптимальне управління виробництвом та зберіганням виготовленої продукції
- 9.4. Стійкість розв'язку задачі оптимального управління запасами щодо незначної варіації оптимальних значень керованих параметрів
- 9.5. Завдання для самостійного опрацювання

9.1. Базова однопроводуктова задача управління запасами; її економіко–математична модель

Припустимо, що інтенсивність попиту на певну продукцию є сталою та дорівнює r одиниць продукції за одиницю часу. Запаси цієї продукції можуть поповнюватися неперервно з інтенсивністю s одиниць продукції за одиницю часу.

Якщо інтенсивність s поповнення запасів є меншою від інтенсивності r їх використання ($s < r$), через певний час весь запас буде вичерпано, після чого необмежено зростатиме дефіцит. Уникнути дефіциту можна або шляхом скорочення інтенсивності споживання продукції, або шляхом збільшення інтенсивності її виробництва.

Тому практичній інтерес має випадок, коли інтенсивність поповнення запасів s перевищує інтенсивність споживання запасів r :

$$s > r \quad (9.1)$$

Вважатимемо, що система розпочинає функціонування у момент часу $t = 0$ з нульовим запасом продукції. Тоді з швидкістю $(s - r)$ почне

накопичуватись запас, який впродовж часу t_1 досягне максимального рівня H : $H = (s - r)t_1$. В момент часу t_1 поповнення запасів припиняється. Отже, з цього моменту часу запаси із швидкістю r почнуть скорочуватися та впродовж часу $t_2 = H/r$ досягнуть нульового рівня. Далі, впродовж часу t_3 , із швидкістю r утворюватиметься дефіцит продукції, який потрібно буде ліквідувати у майбутньому. Коли дефіцит досягне максимального рівня h ($h = rt_3$), поповнення запасів відновлюється. Спочатку, впродовж часу t_4 , із швидкістю $(s - r)$ буде ліквідовано дефіцит продукції ($t_4 = h/(s - r)$), а далі цикл зміни обсягу запасів (рис. 9.1) тривалістю $T = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$ одиниць часу відновиться.

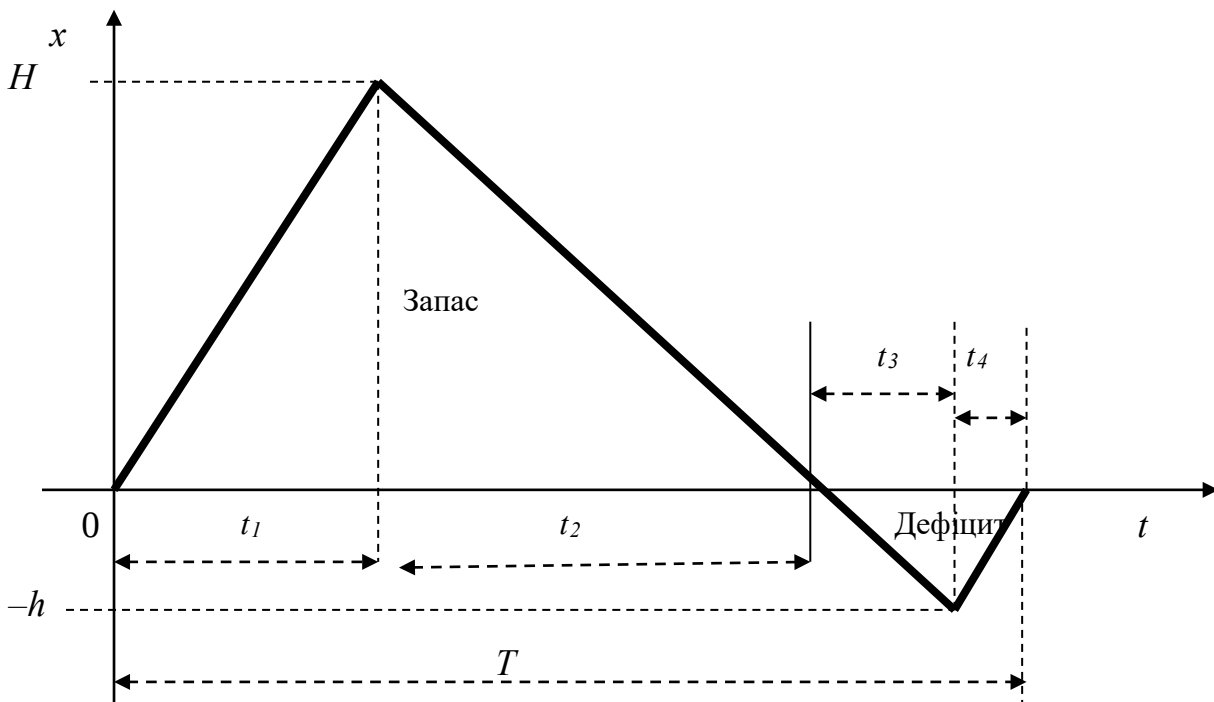


Рис. 9.1. Цикл зміни обсягу запасів
(при $x > 0$ маємо запас продукції, при $x < 0$ — дефіцит)

Для визначення параметрів оптимального циклу управління запасами врахуємо економічні параметри:

c_1 — витрати на зберігання одиниці продукції впродовж одиниці часу;

c_2 — втрати внаслідок дефіциту одиниці продукції за одиницю часу;

c_3 — витрати, пов'язані з відновленням поповнення запасів продукції.

Тоді середні за одиницю часу загальні витрати в системі управління запасами у обчислюватимуться за формулою:

$$y = \frac{c_1 \frac{1}{2} H(t_1 + t_2) + c_2 \frac{1}{2} h(t_3 + t_4) + c_3}{T} \quad (9.2)$$

У чисельнику перший доданок відповідає витратам на зберігання запасів впродовж одного циклу, другий доданок — втратам внаслідок

дефіциту, третій – витратам на відновлення поповнення запасів продукції, яке упродовж циклу тривалістю T здійснюється один раз – у момент часу $t = t_1 + t_2 + t_3$.

Отже, задача мінімізації середніх за одиницю часу загальних витрат в системі управління запасами набирає вигляду:

$$y = \frac{c_1 \frac{1}{2} H(t_1 + t_2) + c_2 \frac{1}{2} h(t_3 + t_4) + c_3}{T} \rightarrow \min \quad (9.3)$$

$$H = (s - r)t_1 = rt_2 \quad (9.4)$$

$$h = rt_3 = (s - r)t_4 \quad (9.5)$$

$$T = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 \quad (9.6)$$

де параметри r , s , c_1 , c_2 та c_3 вважаються відомими, а всі інші підлягають визначенню. Усі змінні задачі, за економічним змістом, повинні бути невід'ємними.

Задача (9.3) – (9.6) має назву базової однопродуктової задачі управління запасами.

9.2. Аналітичне розв'язування базової однопродуктової задачі

Якщо з рівнянь (9.4) – (9.6) змінні H , h , T , t_2 та t_3 виразити через змінні t_1 і t_4 , нелінійна багатовимірна оптимізаційна задача з обмеженнями (9.3) – (9.6) буде зведеною до двовимірної нелінійної оптимізаційної задачі без обмежень:

$$y = \frac{\frac{1}{2}c_1(s-r)t_1^2 + \frac{1}{2}c_2(s-r)t_4^2 + \frac{r}{s}c_3}{t_1 + t_4} \rightarrow \min \quad (9.7)$$

З умови оптимальності задачі (9.7) – рівність нулю частинних похідних функції y за змінними t_1 і t_4 – одержимо формули обчислення оптимальних параметрів циклу управління запасами для базової економіко–математичної моделі (9.3) – (9.6). Зокрема:

1) оптимальна тривалість циклу:

$$T^* = \sqrt{\frac{2s(c_1 + c_2)c_3}{r(s-r)c_1c_2}} \quad (9.8)$$

2) оптимальний максимальний рівень запасів:

$$H^* = \sqrt{\frac{2r(s-r)c_2c_3}{sc_1(c_1 + c_2)}} \quad (9.9)$$

3) оптимальний максимальний рівень дефіциту:

$$h^* = \sqrt{\frac{2r(s-r)c_1c_3}{sc_2(c_1 + c_2)}} \quad (9.10)$$

4) оптимальні середні за одиницю часу загальні витрати:

$$y^* = \sqrt{\frac{2r(s-r)c_1c_2c_3}{s(c_1+c_2)}} \quad (9.11)$$

5) оптимальний розмір однієї партії поповнення запасів впродовж одного циклу:

$$q^* = rT^* = \sqrt{\frac{2rs(c_1+c_2)c_3}{(s-r)c_1c_2}} \quad (9.12)$$

Бачимо, що у разі виконання нерівності (9.1) усі вирази (9.8) – (9.12) є визначеними, причому всі показники задовольнятимуть умову невід’ємності.

9.3. Приклад: оптимальне управління виробництвом та зберіганням виготовленої продукції

Постановка задачі. Фірмовою продукцією меблевої фабрики є гарнітур “Соната”, який вона може виготовляти у кількості 300 одиниць на місяць. Вартість одного гарнітура – 5 тисяч гривень. Щомісячний попит на цю продукцію дорівнює 200 одиниць і вважається рівномірним. Якщо запит на поставку гарнітура фабрика виконає із запізненням, вона несе збитки у розмірі 0,1 % вартості за кожний день затримки. Фабрика може зберігати готову продукцію. Витрати на зберігання складають приблизно 2 % середньої вартості запасів на місяць. У вільний від виготовлення гарнітурів час фабрика виробляє меблеві дрібниці. Витрати на налагодження поточної лінії для запуску виробництва партії гарнітурів – 10 тисяч гривень.

З якою періодичністю доцільно організовувати цикл для виробництва гарнітурів та яким має бути розмір однієї партії гарнітурів? Якою має бути місткість складу? Чи є сенс допускати дефіцит, яким може бути максимальний економічно виправданий розмір дефіциту?

Розв’язування задачі на комп’ютері з використанням стандартних функцій Excel. Оскільки постановка задачі цілком відповідає базовій однопродуктовій економіко–математичній моделі управління запасами (9.3) – (9.6), для відповіді на поставлені у прикладі запитання можна скористатися формулами (9.8) – (9.12). Потрібно лише визначитися в одиницях виміру та зафіксувати значення вихідних параметрів.

За одиницю виміру часу оберемо 1 місяць, за одиницю продукції – 1 меблевий гарнітур “Соната”, за одиницю виміру витрат – 1 тисячу гривень. У наведених одиницях виміру вихідні показники задачі будуть наступними:

- 1) інтенсивність попиту: $r = 200$ (гарнітурів на місяць);
- 2) інтенсивність виробництва гарнітурів з метою поповнення запасів чи ліквідації дефіциту: $s = 300$ (гарнітурів на місяць);
- 3) витрати на зберігання одного гарнітура впродовж місяця:
 $c_1 = 5 * 0.02 = 0.1$ (тис. грн.);
- 4) втрати внаслідок дефіциту – через відсутність потрібного гарнітура впродовж одного місяця (30 днів):

$$c_2 = 5 * 0.001 * 30 = 0.15 \text{ (тис. грн.);}$$

5) витрати, пов'язані з налагодженням поточної лінії та відновленням виробництва гарнітурів: $c_3 = 10$ (тис. грн.).

Відкриємо робочу книгу Excel, якій дамо назву "Mebli.xls", та на першому аркуші у клітинках A1:F1 (об'єднуємо) впишемо назву задачі: "Оптимальне управління виробництвом та зберіганням меблів", у клітинках A2:F2 (об'єднуємо) уточнюємо, що йдеться про базову однопродуктову модель управління запасами, а в клітинках A3:F3 (теж об'єднуємо) зазначаємо, що йдеться про використання підсумкових розрахункових формул.

Блок клітинок A5:E10 відводимо для вихідних даних, а блок клітинок A12:E17, який за формою збігається з блоком A5:E10 – для підсумкових даних про оптимальний цикл управління запасами:

- тривалість циклу,
- максимальний рівень запасів,
- максимальний рівень дефіциту,
- загальні середньомісячні витрати,
- розмір однієї партії гарнітурів.

Для цього у клітинки E13:E17 заносимо потрібні формули:

- у клітинку E13 (відповідає формулі (9.8):
 $\text{=КОРЕНЬ}(2*E7*(E8+E9)*E10/E6/(E7-E6)/E8/E9)$
- у клітинку E14 (відповідає формулі (9.9):
 $\text{=КОРЕНЬ}(2*E6*(E7-E6)*E9*E10/E7/E8/(E8+E9))$
- у клітинку E15 (згідно формули (9.10):
 $\text{=КОРЕНЬ}(2*E6*(E7-E6)*E8*E10/E7/E9/(E8+E9))$
- у клітинку E16 (відповідає формулі (9.11):
 $\text{=КОРЕНЬ}(2*E6*(E7-E6)*E8*E9*E10/E7/(E8+E9))$
- у клітинку E17 (згідно формули (9.12):
 $\text{=КОРЕНЬ}(2*E6*E7*(E8+E9)*E10/(E7-E6)/E8/E9)$

Автоматично після введення кожної формули отримуємо відповідний результат. Підсумки усіх розрахунків показано на рисунку 9.2.

Розв'язування задачі з використанням інструменту "Поиск решения". Далі спробуємо розв'язати задачу про оптимальне управління виробництвом та зберіганням меблевих гарнітурів як нелінійну багатовимірну оптимізаційну задачу (9.3) – (9.6) з використанням інструменту пошуку рішення Excel. Для цього працюватимемо на другому аркуші нашої робочої книги. В клітинках A1:F1 знову вписуємо назву задачі: "Оптимальне управління виробництвом та зберіганням меблів", а в клітинках A2:F2 – що йдеться про базову однопродуктову модель. В клітинках A3:F3 уточнюємо, що будемо використовувати інструмент пошуку розв'язку.

Блок клітинок A5:E10 відводимо для вихідних даних задачі. Цей блок є точною копією аналогічного блоку з попереднього аркушу (рис. 9.2).

	A	B	C	D	E	F
1	Оптимальне управління виробництвом та зберіганням меблів					
2	Базова однопродуктова модель					
3	Підсумкові розрахункові формули					
4						
5	Вихідні дані:					
6	1. Інтенсивність попиту				200	
7	2. Інтенсивність виробництва				300	
8	3. Питомі витрати на зберігання				0,1	
9	4. Питомі втрати від дефіциту				0,15	
10	5. Витрати на відновлення виробництва				10	
11						
12	Параметри оптимального циклу:					
13	1. Тривалість циклу				2,23607	
14	2. Максимальний рівень запасів				89,4427	
15	3. Максимальний рівень дефіциту				59,6285	
16	4. Загальні середньомісячні витрати				8,94427	
17	5. Розмір однієї партії				447,214	
18						

Рис. 9.2. Робочий аркуш Excel з вихідними даними задачі про оптимальне управління виробництвом та зберіганням меблевих гарнітурів "Соната" та результатами розрахунків за підсумковими формулами

В блоці A12:E22 (дивись рис. 9.3) побудуємо таблицю для підсумкових даних про всі параметри оптимального циклу управління запасами. А саме: тривалість циклу, з розбивкою на періоди накопичення та використання запасів і періоди накопичення та ліквідації дефіциту (відповідно, змінні T , t_1 , t_2 , t_3 і t_4), максимальний рівень запасів (H), максимальний рівень дефіциту (h), загальні середньомісячні витрати (y – цільова змінна) та розмір однієї партії гарнітурів (q). Для цього, крім текстових записів, заносимо формули:

- у клітинку E13, відповідно до рівняння (9.6):

$$=СУММ(E15:E18)$$
- у клітинку E19, відповідно до першого з двох рівнянь (9.4):

$$=(E7-E6)*E15$$
- у клітинку E20, відповідно до першого з двох рівнянь (9.5):

$$=E6*E17$$
- у клітинку E21, відповідно до формули (9.3):

$$=(0,5*E8*E19*(E15+E16)+0,5*E9*E20*(E17+E18)+E10)/E13$$
- у клітинку E22, відповідно до першої розрахункової формули (9.12):

$$=E6*E13$$

Помічаємо, що після запису формул у зазначених клітинках з'явилися нулі, крім клітинки E21, де результатом є повідомлення: "#ДЕЛ/0!". Причиною цього є відсутність значень в клітинках E15:E18, призначених для змінних t_1 , t_2 , t_3 і t_4 , через що Excel вважає, що значення цих змінних дорівнюють нулю. Отже, значення змінної T в клітинці E13 теж дорівнює нулю, через що вираз в клітинці E21 є невизначеним.

Уведемо у клітинки E15:E18 довільні додатні початкові значення змінних t_1 , t_2 , t_3 і t_4 . Покладемо, наприклад, $t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = 7$.

Тепер звернемося до інструменту пошуку рішення. У діалоговому вікні **“Поиска решения”** в полі **“Установить целевую ячейку”** вкажемо на адресу цільової клітинки (\$E\$21) та ввімкнемо перемикач вибору оптимізаційного спрямування цільової функції у положення **“минимальному значению”**.

У полі **“Изменяя ячейки”** вкажемо на адреси клітинок з незалежними змінними t_1 , t_2 , t_3 і t_4 : \$E\$15:\$E\$18

Далі введемо обмеження задачі /йдеться про другі рівняння у записах (9.4) та (9.5)/:

\$E\$19	=	\$E\$6*\$E\$16
\$E\$20	=	(\$E\$7-\$E\$6)* \$E\$18

Усі обмеження задачі враховано.

Звернемося тепер до встановлення потрібних параметрів пошуку рішення:

Параметр	Що робимо	Кінцеве значення
Максимальное время	не міняємо	100 секунд
Предельное число итераций	збільшуємо	10000
Относительная погрешность	зменшуємо	0,00001
Допустимое отклонение	зменшуємо	1%
Сходимость	зменшуємо	0,000001
Неотрицательные значения	ставимо прапорець	
Оценки	зазначаємо	квадратичная
Разности		центральные
Метод поиска		Ньютона

Повертаємося до діалогового вікна пошуку рішення та натискаємо кнопку **“Выполнить”**.

Після завершення пошуку рішення у вікні **“Результаты поиска решения”** увімкнемо перемикач **“Сохранить найденное решение”** та натиснемо **ОК**.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Оптимальне управління виробництвом та зберіганням меблів						
2	Базова однопродуктова модель						
3	Інструмент пошуку рішення						
4							
5	Вихідні дані:						
6	1. Інтенсивність попиту				200		
7	2. Інтенсивність виробництва				300		
8	3. Питомі витрати на зберігання				0,1		
9	4. Питомі втрати від дефіциту				0,15		
10	5. Витрати на відновлення виробництва				10		
11							
12	Параметри оптимального циклу:						
13	1. Тривалість циклу				2,23617454	2,23606798	
14	У тому числі:						
15	1) накопичення запасів				0,89446254		
16	2) використання запасів				0,44723127		
17	3) накопичення дефіциту				0,29816024		
18	4) ліквідація дефіциту				0,59632048		
19	2. Максимальний рівень запасів				89,4462544	89,4427191	
20	3. Максимальний рівень дефіциту				59,632048	59,6284794	
21	4. Загальні середньомісячні витрати				8,94427192	8,94427191	
22	5. Розмір однієї партії				447,234907	447,213595	
23							
24							

Рис. 9.3. Робочий аркуш з вихідними даними задачі оптимального управління виробництвом і зберіганням меблевих гарнітурів "Соната" та результатами розрахунків з використанням інструменту "Поиск решения" Excel

Результати розрахунків наведено на рисунку 9.3. Нелінійна оптимізація призводить лише до наближеного розв'язку задачі. Тому, для порівняння з точним розв'язком, у клітинки F13, F19:F22 ми переписали результати, отримані попереднім способом. Спостерігаємо досить високий збіг кінцевих результатів. Водночас радимо при розв'язуванні нелінійних задач оптимізації робити на один розрахунок, а серію розрахунків, щоб бути впевненим у попаданні в окіл точки оптимуму. Скажімо, наші перші результати (з дещо слабкішими значеннями параметрів пошуку рішення) призводили до стратегії з загальними середньомісячними витратами близько 10 тисяч гривень, що перевищує оптимальний рівень мало не на 10 %.

Перевага налаштованого інструменту пошуку рішення полягає у тому, що він дозволяє швидко отримати розв'язок задачі у випадку, коли потрібно врахувати додаткові умови (наприклад, вимогу, щоб розмір однієї партії гарнітурів не був меншим від 500 одиниць або, скажімо, щоб максимальний розмір дефіциту не перевищував 40 одиниць продукції). Це свідчить про доцільність та можливість використовувати інструмент "Поиск решения" для всебічного аналізу розв'язку оптимізаційної логістичної задачі.

Відповідь. Виходячи з практичних міркувань, за наведених умов економічно виправдано обрати наступну стратегію управління виробництвом та запасами виготовленої продукції:

- 1) розмір однієї партії гарнітурів визначити у кількості 450 одиниць;
- 2) припиняти виготовлення гарнітурів та переходити до виготовлення меблевих дрібниць в момент, коли рівень запасів гарнітурів дорівнюватиме 90 одиниць;
- 3) допускати дефіцит готової продукції та відновлювати виробництво гарнітурів у момент, коли дефіцит становитиме 60 одиниць.

Зазначена стратегія забезпечуватиме мінімум загальних середньомісячних витрат, пов'язаних зі зберіганням запасів, відновленням виробництва та втратами внаслідок дефіциту, у розмірі до 8.945 тис. грн.

9.4. Стійкість розв'язку задачі оптимального управління запасами щодо незначної варіації оптимальних значень керованих параметрів

Властивість задачі оптимального управління запасами полягає у тому, що її розв'язок є досить стійким щодо незначної варіації оптимальних значень керованих параметрів: тривалості циклу зміни обсягу запасів T , розміру однієї партії поповнення запасів впродовж одного циклу q тощо.

З'ясуємо, наприклад, чутливість оптимальних середніх за одиницю часу загальних витрат y^* в системі управління запасами від розміру q однієї партії поповнення запасів впродовж одного циклу. Для цього скористаємося інструментом "**Поиск решения**", налаштованим на розв'язування задачі оптимального управління виробництвом і зберіганням меблевих гарнітурів "Соната" (дивись підрозділ 9.3 та рисунок 9.3). Бачимо, що розміру однієї партії $q = 447.234907$ гарнітурів відповідають оптимальні загальні середньомісячні витрати $y^* = 8.94427192$ тисяч гривень.

Спробуємо тепер знайти залежність оптимальних загальних середньомісячних витрат y^* від розміру однієї партії поповнення запасів q в межах варіації цього керованого параметру від 200 до 700 одиниць продукції (гарнітурів). Точніше, побудуємо кусково-лінійну апроксимацію цієї залежності. Для цього розіб'ємо інтервал $[200, 700]$ на відрізки довжиною 50 одиниць продукції та зафіксуємо значення межових точок (таких точок 11):

200, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 550, 600, 650, 700.

Далі для кожного наведеного значення розміру однієї партії поповнення запасів q_i , $i = \overline{1, 11}$, потрібно розв'язати оптимізаційну задачу управління запасами (9.3) – (9.6) з додатковою умовою:

$$q = rT = q_i \quad (9.13)$$

Перше з двох рівнянь (9.13) ми враховували, коли вносили формулу у клітинку E22 **Листа 2** книги "Mebli.xls", тому в кожній i -й задачі лишається взяти до уваги лише друге рівняння умови (9.13).

Розпочнемо з першої задачі ($i=1$, $q_1=200$). Активізуємо в книзі "Mebli.xls" на її другому аркуші інструмент пошуку рішення, який було використано раніше для розв'язування базової задачі (рис. 9.4), та командою "Добавить" додамо обмеження: $SE\$22=200$, після чого натиснемо на кнопку "Выполнить".

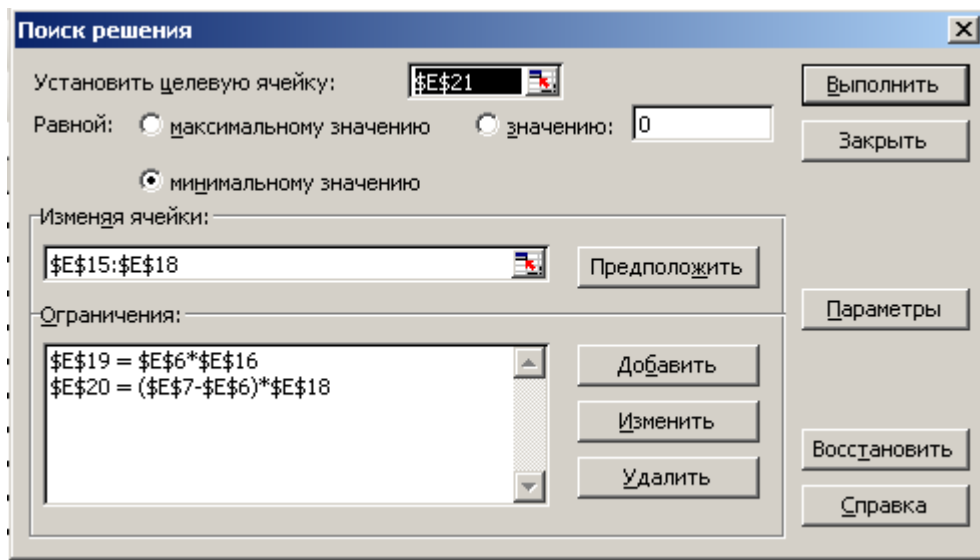


Рис. 9.4. Діалогове вікно інструменту пошуку рішення, яке було налаштоване для розв'язування базової задачі

Зафіксуємо результат, який буде отримано у клітинці E21: $y^*=12.000$ (зараз і надалі обмежимося точністю подання обсягів оптимальних загальних середніх витрат із трьома знаками після десяткової коми).

Перейдемо до другої задачі ($i=2$, $q_2=250$). Знову активізуємо інструмент пошуку рішення, виділимо в його діалоговому вікні щойно введені обмеження: $SE\$22=200$, та за допомогою кнопки "Изменить" поміняємо на обмеження: $SE\$22=250$. Натискаємо кнопку "Выполнить" та зафіксуємо з клітинки E21 новий результат: $y^*=10.500$.

В аналогічний спосіб, щоразу змінюючи додаткове обмеження, розв'язуємо й решту дев'ять задач, фіксуючи відповідні результати у підсумковій таблиці 9.1.

Таблиця 9.1

Залежність оптимальних загальних середньомісячних витрат y^* від розміру однієї партії поповнення запасів q

q	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700
y^*	12,000	10,500	9,667	9,214	9,000	8,944	9,000	9,136	9,333	9,577	9,857

Графік залежності оптимальних загальних середньомісячних витрат y^* від розміру однієї партії поповнення запасів q , побудований майстром діаграм Excel за даними таблиці 9.1, наведено на рис. 9.5.

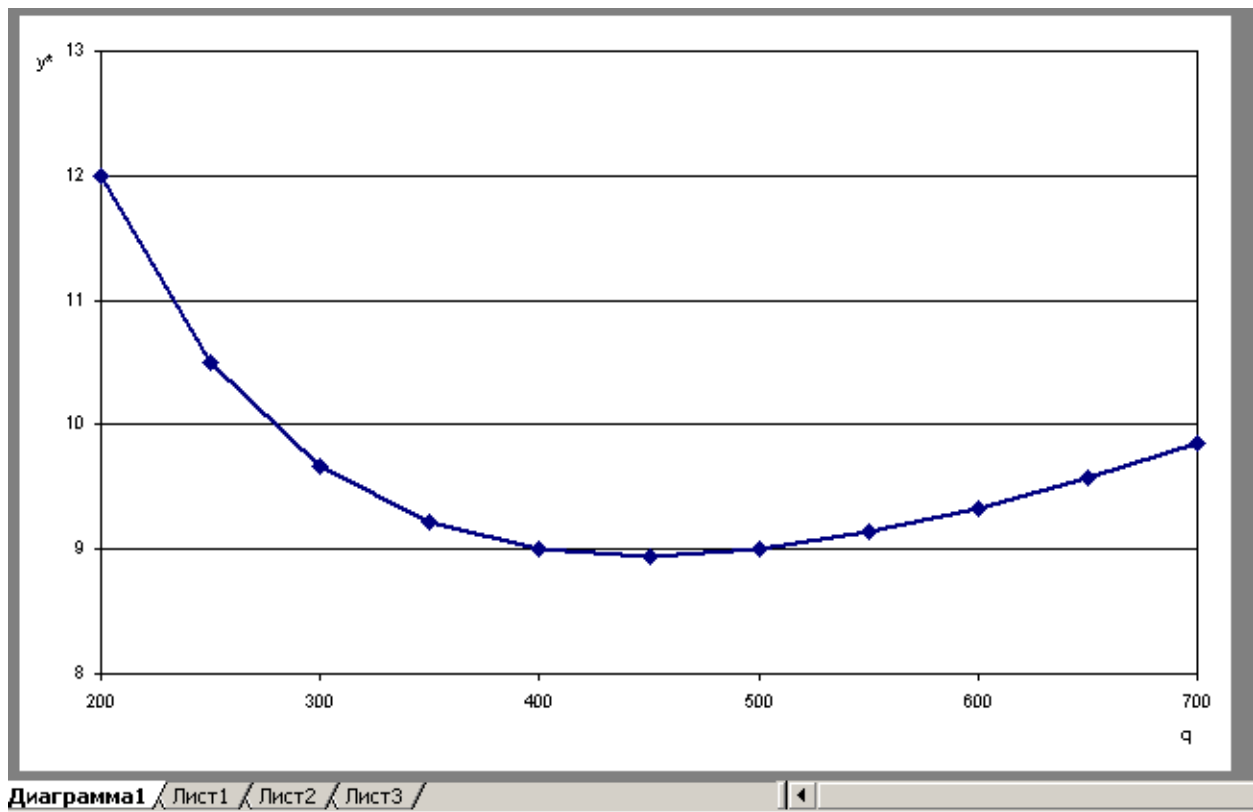


Рис. 9.5. Кусково–лінійна апроксимація залежності оптимальних загальних середньомісячних витрат y^* в системі управління запасами від розміру однієї партії поповнення запасів q

Помічаємо, що досліджувана залежність відтворюється опуклою функцією, причому незначні відхилення розміру однієї партії поповнення запасів q від оптимального значення цього параметру $q^* \approx 450$ супроводжуються незначним збільшенням загальних середньомісячних витрат: при $400 \leq q \leq 500$ загальні середньомісячні витрати в системі управління запасами не перевищуватимуть 9 тисяч гривень, тобто відхилення від оптимального рівня витрат не перевищуватиме 0,63 %. Водночас при подальшому зростанні відхилення розміру однієї партії поповнення запасів q від оптимального розміру $q^* \approx 450$ оптимальні загальні середньомісячні витрати y^* в системі управління запасами помітно збільшуватимуться.

Наведена властивість розв’язку задачі оптимального управління запасами підкреслює, з одного боку, доцільність та економічну ефективність пошуку логістичних рішень з використанням оптимізаційних економіко–математичних методів і моделей та обчислювальної техніки. З іншого боку, ця властивість свідчить про можливість округлювання або незначного відхилення від теоретичних оптимальних результатів, якщо це є виправданим з практичних міркувань.

9.5. Завдання для самостійного опрацювання

1. Записати системою рівнянь умови оптимальності задачі (9.7) та обґрунтувати формули (9.8) – (9.12) обчислення оптимальних параметрів циклу управління запасами для базової однопродуктової задачі.

2. Як зміниться оптимальна стратегія управління виробництвом і зберіганням меблевих гарнітурів (приклад у підрозділі 9.3), якщо питомі витрати внаслідок дефіциту зростуть удвічі, витрати на відновлення виробництва гарнітурів збільшаться на 50 %, а умови зберігання готової продукції не дозволятимуть складувати одночасно понад 50 виготовлених гарнітурів?

3. З'ясувати чутливість оптимальних середніх за одиницю часу загальних витрат в системі управління запасами y^* від періодичності відновлення виробництва меблевих гарнітурів, тобто тривалості циклу T .

РОЗДІЛ 10. ОСНОВНІ МОДИФІКАЦІЇ БАЗОВОЇ ОДНОПРОДУКТОВОЇ ЗАДАЧІ УПРАВЛІННЯ ЗАПАСАМИ

Опрацьовані у попередньому розділі методи розв'язування базової однопродуктової задачі управління запасами можуть легко поширюватися на певні інші випадки. Це, зокрема, випадки, коли поповнення запасів здійснюється миттєво – окремими партіями через певні проміжки часу; коли заборонено допускати дефіцит продукції; і навіть коли відсутні можливості зберігати виготовлену продукцію, а управління полягає в оптимальному накопиченні та подальшому скороченні дефіциту за рахунок своєчасного відновлення випуску продукції.

Досліджуватимемо чотири з можливих модифікацій базової однопродуктової задачі управління запасами – три з них проаналізуємо спільно, а четверту пропонуємо Вам опрацювати самостійно.

- 10.1. Оптимальне управління запасами за умов заборони дефіциту продукції
- 10.2. Оптимальне управління запасами за умов, що поповнення запасів здійснюється миттєво
- 10.3. Оптимальне управління запасами за умов, що дефіцит заборонено, а поповнення запасів здійснюється миттєво (класична задача управління запасами)
- 10.4. Завдання для самостійного опрацювання:
Оптимальне управління "запасами" за відсутності умов для зберігання виготовленої продукції

10.1. Оптимальне управління запасами за умов заборони дефіциту продукції

Припустимо, як і в базовій однопродуктовій задачі, що інтенсивність попиту на певну продукцію є сталою та дорівнює r одиниць продукції за одиницю часу. Запаси продукції можуть поповнюватися неперервно з інтенсивністю s одиниць продукції за одиницю часу, причому $s > r$. Дефіцит продукції зараз забороняється, тобто у будь який момент часу попит має бути забезпечений запасами.

Вважатимемо, що система розпочинає функціонування у момент часу $t = 0$ з максимальним запасом у розмірі H одиниць продукції. Тоді зі швидкістю r запаси почнуть скорочуватися та в момент часу $t_1 = H / r$ будуть вичерпані повністю. Щоб уникнути дефіциту, саме в цей момент часу слід почати поповнювати запаси. У такому випадку обсяг запасів почне з швидкістю $(s - r)$ збільшуватися та впродовж часу $t_2 = H / (s - r)$ досягне первісного максимального рівня H . Далі, з моменту часу $T = t_1 + t_2$, цикл зміни обсягу запасів відновлюється (рис. 10.1).

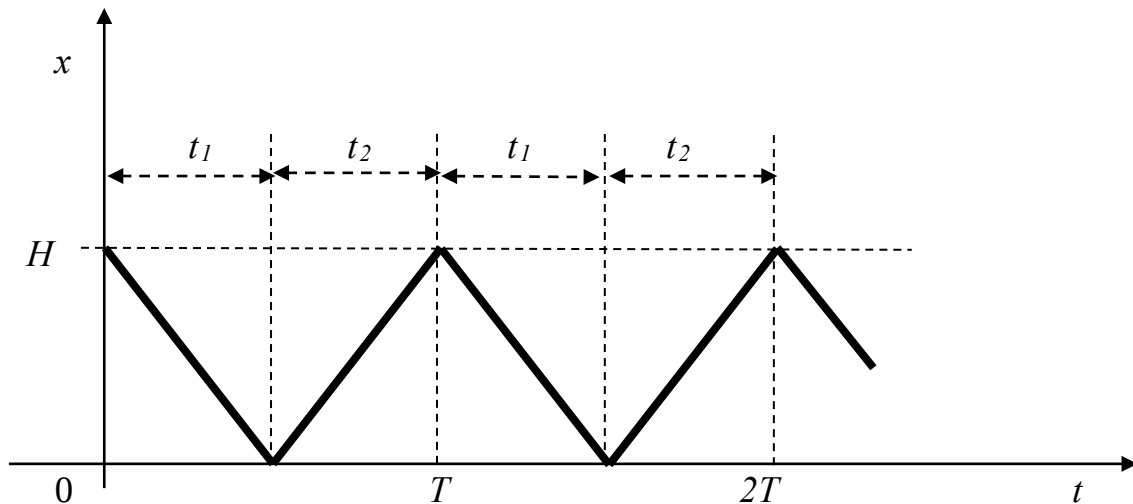


Рис. 10.1. Графік зміни обсягу запасів x у випадку, коли дефіцит заборонено

Для визначення економічно обґрунтованих параметрів H і T оптимального циклу управління запасами візьмемо до уваги витрати на зберігання одиниці продукції впродовж одиниці часу – c_1 , а також витрати, пов'язані з відновленням поповнення запасів продукції – c_3 /залишаємо ці позначення такими ж, що були використані у базовій задачі/.

За наведених позначень задача мінімізації середніх за одиницю часу загальних витрат в системі управління запасами – y – набирає вигляду:

$$y = \frac{c_1 \frac{1}{2} H(t_1 + t_2) + c_3}{T} \rightarrow \min \quad (10.1)$$

$$H = rt_1 = (s - r)t_2 \quad (10.2)$$

$$T = t_1 + t_2 \quad (10.3)$$

де параметри r , s , c_1 , та c_3 вважаються відомими.

Виявляється, що підсумкові формули розв'язку нашої нелінійної багатовимірної оптимізаційної задачі з обмеженнями можна отримати з формул (9.8) – (9.12) розв'язку базової однопродуктової задачі управління запасами, якщо покласти у зазначених формулах показник питомих втрат внаслідок дефіциту за одиницю часу – c_2 (в моделі (10.1) – (10.3) він відсутній) – нескінченно великим. Такий підхід має очевидну економічну інтерпретацію: у випадку надзвичайно високих втрат через дефіцит цей дефіцит є сенс звести до нуля, тобто унеможливити.

Отже, обчислюючи границі при $c_2 \rightarrow +\infty$, з формул (9.8) – (9.12) знаходимо розв'язок однопродуктової задачі (10.1) – (10.3) управління запасами за умов заборони дефіциту продукції:

1) оптимальна тривалість циклу:

$$T^* = \lim_{c_2 \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2s(c_1 + c_2)c_3}{r(s-r)c_1c_2}} = \sqrt{\frac{2sc_3}{r(s-r)c_1}} \quad (10.4)$$

2) оптимальний максимальний рівень запасів:

$$H^* = \lim_{c_2 \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2r(s-r)c_2c_3}{sc_1(c_1 + c_2)}} = \sqrt{\frac{2r(s-r)c_3}{sc_1}} \quad (10.5)$$

3) оптимальний максимальний рівень дефіциту:

$$h^* = \lim_{c_2 \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2r(s-r)c_1c_3}{sc_2(c_1 + c_2)}} = 0 \quad (10.6)$$

– цей результат за умов заборони дефіциту ми й очікували;

4) оптимальні середні за одиницю часу загальні витрати:

$$y^* = \lim_{c_2 \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2r(s-r)c_1c_2c_3}{s(c_1 + c_2)}} = \sqrt{\frac{2r(s-r)c_1c_3}{s}} \quad (10.7)$$

5) оптимальний розмір однієї партії поповнення запасів впродовж одного циклу:

$$q^* = rT^* = \sqrt{\frac{2rsc_3}{(s-r)c_1}} \quad (10.8)$$

Скажімо, якщо скористатися вихідними даними для прикладу щодо виробництва меблевих гарнітурів (підрозділ 9.3):

$$r = 200, s = 300, c_1 = 0.1, c_3 = 10,$$

то у випадку відмови меблевої фабрики від дефіциту (це буде додатковим стимулом для покупців) оптимальна стратегія управління запасами матиме такі характеристики:

- оптимальна тривалість циклу:

$$T^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 300 \cdot 10}{200 \cdot (300 - 200) \cdot 0.1}} = \sqrt{3} \approx 1.732 \text{ (місяці)} \approx 52 \text{ (дні)};$$

- оптимальний максимальний рівень запасів:

$$H^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 200 \cdot (300 - 200) \cdot 10}{300 \cdot 0.1}} = \frac{200}{\sqrt{3}} \approx 116 \text{ (одиниць продукції)};$$

- оптимальний розмір однієї партії гарнітурів впродовж циклу:

$$q^* = 200 \cdot 1.732 \approx 347 \text{ (гарнітурів)}.$$

Тоді оптимальні середньомісячні загальні витрати складуть:

$$y^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 200 \cdot (300 - 200) \cdot 0.1 \cdot 10}{300}} = \frac{20}{\sqrt{3}} \approx 11.547 \text{ (тисяч гривень)},$$

що перевищує оптимальний показник для випадку, коли дефіцит було дозволено, на 2,6 тисяч гривень.

Інші способи знаходження цього розв'язку полягають або у використанні спеціально налаштованого на нашу задачу інструменту "Поиск решения" Excel, або ж у зверненні до інструменту пошуку рішення, який

було налаштовано на базову задачу з можливістю дефіциту (рисунки 9.3, 9.4). В останньому випадку потрібно до обмежень базової задачі додати вимогу занулення змінних, що відповідають тривалостям проміжків накопичення та ліквідації дефіциту (клітинки E17 і E18 на рис. 9.3).

У будь якому разі пошук розв'язку оптимізаційної логістичної задачі за різними способами посилює рівень обґрунтування майбутнього рішення.

10.2. Оптимальне управління запасами за умов, що поповнення запасів здійснюється миттєво

Задача, що розглядається, виникає в ситуації, коли запаси поповнюються миттєво, тобто окремими партіями у певні моменти часу. Якщо поповнювати запаси великими партіями, через великі проміжки часу, середній рівень запасів та витрати на їх зберігання будуть високими. Кожне поповнення запасів супроводжується витратами, пов'язаними з оформленням та організацією поставки, які не залежать від розміру партії поставки. Тому, якщо запаси поповнювати меншими партіями, але частіше, зростають витрати, пов'язані зі здійсненням усіх поставок. Задача полягає у визначенні такої стратегії управління запасами, за якої середні за одиницю часу загальні витрати на утримання запасів плюс втрати внаслідок дефіциту та витрати на організацію поповнення запасів були б якнайменшими. Зрозуміло, що пошук цієї стратегії здійснюється з урахуванням попиту на продукцію, що зберігатиметься.

Припустимо, що інтенсивність попиту на продукцію дорівнює r одиниць продукції за одиницю часу. Якщо система розпочинає функціонування у момент часу $t=0$ з нульовим запасом продукції, тоді з швидкістю r починає накопичуватися дефіцит, який впродовж часу t_1 досягне максимального рівня $h = rt_1$. В момент часу t_1 відбувається миттєве поповнення запасів у кількості q одиниць продукції, з яких h одиниць покривають накопичений до цього дефіцит, а решта – у розмірі $H = q - h$ – утворюють запас. З моменту часу t_1 цей запас починає скорочуватися зі швидкістю r та за час $t_2 = H/r$ досягне нульового рівня. Далі, з моменту часу $T = t_1 + t_2$, цикл зміни обсягу запасів відновиться (рис. 10.2).

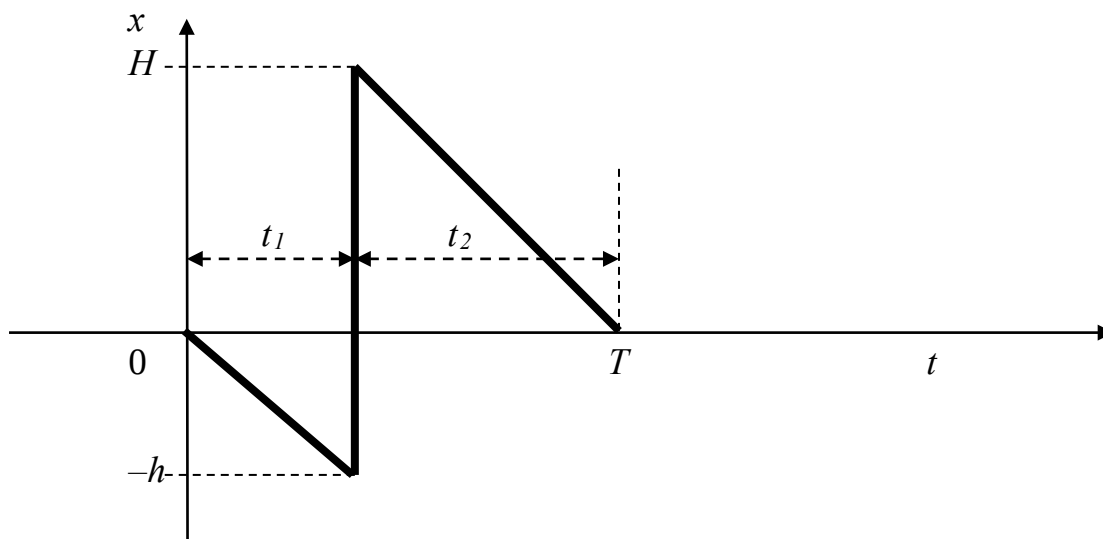


Рис. 10.2. Цикл зміни обсягу запасів у випадку, коли попит є неперервним, а поповнення запасів здійснюється миттєво

Щоб визначити параметри H , h , q , T , t_1 і t_2 оптимального циклу управління запасами, потрібно розв'язати задачу нелінійного програмування з обмеженнями:

$$\left. \begin{aligned} y = \frac{c_1 \frac{1}{2} H t_2 + c_2 \frac{1}{2} h t_1 + c_3}{T} \rightarrow \min \\ h = r t_1 \\ H = r t_2 \\ q = h + H \\ T = t_1 + t_2 \end{aligned} \right\} \quad (10.9)$$

де c_1 – витрати на зберігання одиниці продукції впродовж одиниці часу; c_2 – втрати внаслідок дефіциту одиниці продукції впродовж одиниці часу; c_3 – витрати, пов'язані з організацією поповнення запасів однією партією продукції; y – середні за одиницю часу загальні витрати в системі управління запасами.

Розв'язати цю задачу можна або з використанням інструменту "**Поиск решения**" Excel, або ж зі зверненням до підсумкових формул (9.8) – (9.12) розв'язку базової однопродуктової задачі управління запасами, якщо покласти у зазначених формулах показник інтенсивності поповнення запасів s нескінченно великим.

Отже, обчислюючи границі при $s \rightarrow +\infty$, з формул (9.8) – (9.12) знаходимо розв'язок однопродуктової задачі (10.9) управління запасами за умов їх миттєвого поповнення через певні проміжки часу:

1) оптимальна тривалість циклу:

$$T^* = \lim_{s \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2s(c_1 + c_2)c_3}{r(s-r)c_1c_2}} = \sqrt{\frac{2(c_1 + c_2)c_3}{rc_1c_2}} \quad (10.10)$$

2) оптимальний максимальний рівень запасів:

$$H^* = \lim_{s \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2r(s-r)c_2c_3}{sc_1(c_1 + c_2)}} = \sqrt{\frac{2rc_2c_3}{c_1(c_1 + c_2)}} \quad (10.11)$$

3) оптимальний максимальний рівень дефіциту:

$$h^* = \lim_{s \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2r(s-r)c_1c_3}{sc_2(c_1 + c_2)}} = \sqrt{\frac{2rc_1c_3}{c_2(c_1 + c_2)}} \quad (10.12)$$

4) оптимальні середні за одиницю часу загальні витрати:

$$y^* = \lim_{s \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2r(s-r)c_1c_2c_3}{s(c_1 + c_2)}} = \sqrt{\frac{2rc_1c_2c_3}{(c_1 + c_2)}} \quad (10.13)$$

5) оптимальний розмір однієї партії поповнення запасів впродовж одного циклу:

$$q^* = rT^* = \sqrt{\frac{2r(c_1 + c_2)c_3}{c_1c_2}} \quad (10.14)$$

– переконайтесь, що зараз справджується рівність: $q^* = H^* + h^*$.

Припустимо, наприклад, що магазин продає пральні машини, які імпортуються та завозяться окремими партіями. Попит на пральні машини складає, у середньому, 10 машин на тиждень. Якщо при зверненні чергового покупця пральна машина наявна в магазині, вона реалізується за звичайною ціною – 1750 грн. У випадку, якщо пральна машина відсутня, покупець залишає замовлення та отримує її через кілька днів. У такому разі при оплаті покупець за кожний день очікування товару отримує знижку у розмірі 1 % від вартості машини (тобто втрати магазину складають 17,5 грн. за кожний день затримки). Потрібно визначити, з якою періодичністю доцільно завозити пральні машини з-за кордону в магазин, яким повинен бути розмір однієї партії пральних машин та яким є припустимий рівень дефіциту, якщо витрати на зберігання однієї пральної машини на складі в магазині дорівнюють 0,15 гривні на добу, а витрати на оформлення поповнення запасів однією партією імпорту складають 550 гривень, незалежно від розміру партії.

Маємо:

$r = 10$ (машин на тиждень);

$c_1 = 0.15 \cdot 7 = 1.05$, $c_2 = 17.5 \cdot 7 = 122.5$ (гривень, з розрахунку на одну пральну машину за тиждень);

$c_3 = 510$ гривень.

Отже, користуючись підсумковими формулами (10.10) – (10.14), обчислюємо параметри оптимальної стратегії управління запасами пральних машин (результати округлюємо, враховуємо умови цілочисловості):

- оптимальна періодичність поповнення запасів:

$$T^* = \sqrt{\frac{2 \cdot (1.05 + 122.5) \cdot 510}{10 \cdot 1.05 \cdot 122.5}} \approx \sqrt{97.976} \approx 9.896 \approx 10 \text{ (тижнів);}$$

- оптимальний розмір однієї партії поповнення запасів:

$$q^* = 10 \cdot 10 = 100 \text{ (пральних машин);}$$

- оптимальний максимальний рівень запасів:

$$H^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 122.5 \cdot 510}{1.05 \cdot (1.05 + 122.5)}} \approx \sqrt{9631.728} \approx 98.141 \approx 99 \text{ (машин);}$$

- оптимальний максимальний рівень дефіциту:

$$h^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 1.05 \cdot 510}{122.5 \cdot (1.05 + 122.5)}} \approx \sqrt{0.708} \approx 0.841 \approx 1 \text{ (машина).}$$

За такої стратегії загальні середньотижневі витрати в системі управління запасами пральних машин магазину будуть мінімальними та дорівнюватимуть:

$$y^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 1.05 \cdot 122.5 \cdot 510}{(1.05 + 122.5)}} \approx \sqrt{10625.915} \approx 103.082 \text{ (гривень).}$$

Бачимо, що дефіцит пральних машин в магазині практично відсутній. За наведених умов, можливо, магазину доцільно відмовитися від створення дефіциту взагалі. Але відмова від дефіциту супроводжуватиметься збільшенням оптимальних загальних середньотижневих витрат до величини 103.49 грн., що можна перевірити за допомогою методів, викладених у наступному підрозділі.

10.3. Оптимальне управління запасами за умов, що дефіцит заборонено, а поповнення запасів здійснюється миттєво (класична задача управління запасами)

Припустимо, що в аптеці щоденний попит на певні ліки складає $r = 100$ одиниць. Щодобові витрати на зберігання одиниці цієї продукції $c_1 = 0.0001$ грн. Запас ліків в аптеці поповнюється партіями. Витрати на оформлення поставки однієї партії ліків в аптеку $c_3 = 50$ грн. не залежать від розміру партії. Потрібно визначити: з якою періодичністю T слід поповнювати запас ліків в аптеці та яким має бути розмір однієї партії поставок q , щоб не допускати дефіциту ліків, а витрати на функціонування відповідної системи управління запасами були мінімальними?

Спочатку побудуємо графік зміни обсягу запасів за умов, що дефіцит заборонено, а поповнення запасів здійснюється миттєво. Припустимо, що у момент часу $t = 0$ система починає функціонувати з максимальним запасом у кількості H одиниць продукції. Тоді із швидкістю r запаси почнуть скорочуватися та в момент часу $t_1 = H/r$ будуть вичерпані повністю. Саме в цей момент часу t_1 слід миттєво поповнити запаси партією у кількості q

одиниць продукції. Тобто запас досягне початкового максимального рівня H (в задачі з миттєвими поставками та заборонаю дефіциту справджується рівність: $q = H$) і цикл зміни обсягу запасів тривалістю T відновиться (зараз $T = t_1$) – рис. 10.3.

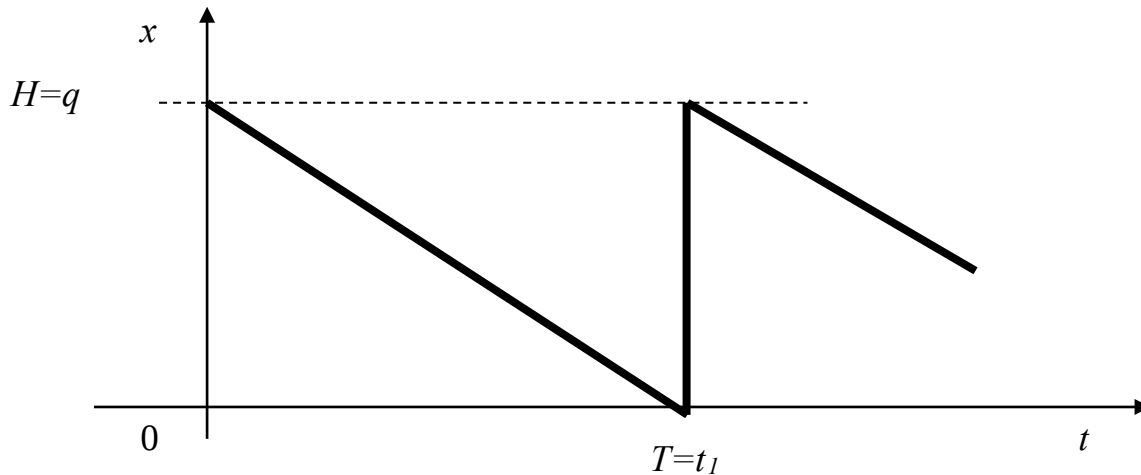


Рис. 10.3. Графік зміни обсягу запасів x у випадку, коли дефіцит заборонено, а поповнення запасів здійснюється миттєво

Позначимо середні за одиницю часу загальні витрати в системі управління запасами через y . Тоді для визначення оптимальних значень параметрів T і q циклу управління запасами, тобто для відповіді на питання:

- з якою періодичністю слід поповнювати запаси?

та

- яким має бути розмір однієї партії поповнення?

– слід знайти розв’язок такої оптимізаційної задачі:

$$\left. \begin{aligned} y = \frac{c_1 \frac{1}{2} q T + c_3}{T} \rightarrow \min \\ q = r T \end{aligned} \right\} \quad (10.15)$$

Складемо функцію Лагранжа:

$$L(q, T, \lambda) = \frac{1}{2} c_1 q + \frac{c_3}{T} + \lambda(q - rT) \quad (10.16)$$

та з умов оптимальності для задачі (10.15) – перетворення на нуль усіх частинних похідних функції Лагранжа – одержимо систему рівнянь:

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{1}{2} c_1 + \lambda = 0 \quad (10.17)$$

$$\frac{\partial L}{\partial T} = -\frac{c_3}{T^2} - \lambda r = 0 \quad (10.18)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = q - rT = 0 \quad (10.19)$$

З системи рівнянь (10.17) – (10.19) послідовно знаходимо:

$$\text{спочатку лагранжів множник: } \lambda^* = -\frac{c_1}{2},$$

а далі:

- оптимальну тривалість циклу управління запасами:

$$T^* = \sqrt{\frac{2c_3}{rc_1}} \quad (10.20)$$

- оптимальний розмір однієї партії поповнення запасів:

$$q^* = \sqrt{\frac{2rc_3}{c_1}} \quad (10.21)$$

Відповідно, мінімальні середні за одиницю часу загальні витрати в системі управління запасами дорівнюватимуть:

$$y^* = \sqrt{2rc_1c_3} \quad (10.22)$$

Існують і інші способи одержати формули (10.20) – (10.22).

Це, насамперед, – з формул (9.8) – (9.12) розв'язку базової задачі управління запасами, якщо покласти у зазначених формулах показник питомих втрат внаслідок дефіциту за одиницю часу c_2 та показник інтенсивності поповнення запасів s нескінченно великими. Інший спосіб полягає у переході до границь при $s \rightarrow +\infty$ у формулах (10.4) – (10.8). Ще один спосіб – перейти до границь при $c_2 \rightarrow +\infty$ у формулах (10.10) – (10.14). Тотожність усіх результатів пропонуємо перевірити самостійно.

Керуючись отриманими формулами, знайдемо показники оптимального циклу управління запасами ліків в аптеці:

- періодичність поповнення запасів: $T^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 50}{100 \cdot 0.0001}} = 100$ (днів);

- розмір однієї партії поповнення запасів:

$$q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 100 \cdot 50}{0.0001}} = 10000 \text{ (одиниць ліків);}$$

- середньодобові загальні витрати в системі управління запасами ліків (мінімально можливі): $y^* = \sqrt{2 \cdot 100 \cdot 0.0001 \cdot 50} = 1$ (гривень).

Розглянуту однопродуктову задачу управління запасами за умов, що дефіцит заборонено, а поповнення запасів здійснюється миттєво, ми називаємо класичною. Саме з цієї простої задачі свого часу розпочалося становлення теорії оптимального управління запасами.

10.4. Завдання для самостійного опрацювання: Оптимальне управління "запасами" за відсутності умов для зберігання виготовленої продукції

Розглянемо таку ситуацію. Відомо, що продукцію, інтенсивність виробництва якої дорівнює s одиниць за одиницю часу, підприємство–виробник зберігати можливості не має. Готова продукція одразу ж надсилається замовникам. Інтенсивність попиту дорівнює r одиниць продукції за одиницю часу і є меншою від інтенсивності виробництва: $r < s$. Тому виробничий процес потрібно час від часу призупиняти, а через деякий час після зупинки відновлювати виробництво, щоб ліквідувати накопичений дефіцит та задовольнити поточний попит. Втрати виробника через затримку із постачанням продукції споживачам складають c_2 грошових одиниць з розрахунку на одиницю продукції за кожну одиницю часу затримки, а витрати на відновлення виробництва продукції – c_3 грошових одиниць.

З якою періодичністю слід відновлювати виробництво та яким має бути обсяг однієї партії виготовлення продукції, щоб загальні витрати підприємства як внаслідок дефіциту продукції, так і в зв'язку з періодичним відновленням виробничого процесу, були мінімальними?

Пропонуємо:

1. Побудувати графік циклу зміни обсягу "запасів" продукції.
2. Побудувати оптимізаційну економіко–математичну модель цієї однопродуктової задачі управління "запасами".
3. Побудувати функцію Лагранжа та записати через систему рівнянь умову оптимальності для задачі управління "запасами" за відсутності умов для зберігання виготовленої продукції.
4. Вивести з системи рівнянь (завдання 3) підсумкові формули обчислення оптимальних параметрів циклу управління запасами для задачі, розрахованої на випадок відсутності умов для зберігання виготовленої продукції.
5. Отримати підсумкові формули обчислення оптимальних параметрів циклу управління "запасами" за відсутності умов для зберігання продукції з формул (9.8) – (9.12) розв'язку базової однопродуктової задачі управління запасами.
6. Використовуючи як підсумкові формули, так і інструмент пошуку рішення, різними способами знайти оптимальну стратегію управління виробництвом та "запасами" меблевих гарнітурів "Соната" (дивись приклад у підрозділі 9.3) в ситуації, коли меблева фабрика втратить можливість зберігати виготовлені меблеві гарнітури.

РОЗДІЛ 11 ОПТИМІЗАЦІЯ РІШЕНЬ ЩОДО УПРАВЛІННЯ БАГАТОПРОДУКТОВИМИ ЗАПАСАМИ

Багатопродуктові задачі оптимального управління запасами з'являються у випадках, коли, наприклад, на складі обмеженої місткості зберігатиметься різна продукція. Опрацюємо відповідну задачу за умов, що дефіцит заборонено, а поставки продукції на склад з метою поповнення запасів здійснюються миттєво.

- 11.1. Економіко–математична модель задачі
- 11.2. Аналітичне розв'язування задачі оптимального управління багатопродуктовими запасами
- 11.3. Розв'язування задачі оптимального управління багатопродуктовими запасами на комп'ютері
- 11.4. Завдання для самостійного опрацювання

11.1. Економіко–математична модель задачі

Уведемо позначення, які потрібні для побудови економіко–математичної моделі задачі оптимального управління багатопродуктовими запасами за умов заборони дефіциту продукції, що зберігається, та миттєвого поповнення запасів:

n – кількість видів продукції; j – номер окремого виду продукції ($j = \overline{1, n}$);

r_j – інтенсивність попиту на j -ту продукцію;

c_{1j} – витрати на зберігання одиниці j -ої продукції впродовж одиниці часу;

c_{3j} – витрати, пов'язані з організацією поповнення запасів однією партією продукції j -го виду;

a_j – площа, необхідна для зберігання одиниці j -ої продукції;

A – площа складу.

Усі зазначені параметри є вихідними та вважаються відомими. Невідомими в нашій багатопродуктовій задачі оптимального управління запасами виступають:

T_j – періодичність поповнення запасів j -ої продукції;

q_j – розмір однієї партії поставок j -ої продукції на склад;

u_j – середні за одиницю часу загальні витрати, пов'язані зі зберіганням та поповненням запасів j -ої продукції;

z – середні за одиницю часу загальні витрати в системі управління багатопродуктовими запасами – цільовий параметр, який підлягає мінімізації.

За наведених позначень економіко–математична модель оптимізаційної багатопродуктової задачі управління запасами набирає вигляду:

$$z = \sum_{j=1}^n y_j \rightarrow \min \quad (11.1)$$

$$y_j = \frac{c_{1j}q_j}{2} + \frac{c_{3j}}{T_j}, \quad j = \overline{1, n} \quad (11.2)$$

$$q_j = r_j T_j, \quad j = \overline{1, n} \quad (11.3)$$

$$\sum_{j=1}^n a_j q_j \leq A \quad (11.4)$$

$$T_j > 0, \quad j = \overline{1, n} \quad (11.5)$$

Цільова функція (11.1) відбиває вимогу мінімізувати загальні середні за одиницю часу витрати в системі управління багатопродуктовими запасами.

Рівняння (11.2) визначають середні за одиницю часу витрати, пов'язані за зберіганням та поповненням запасів окремо по кожній j -й продукції.

Рівняння (11.3) показують, що розмір партії поповнення запасів j -ї продукції повинен відповідати загальному попиту за весь проміжок часу між суміжними поставками цієї продукції.

Нерівність (11.4) враховує місткість складу – вона має бути достатньою для зберігання продукції навіть у випадку, якщо поставки всіх видів продукції на склад відбудуться одночасно.

Нерівності (11.5), разом з рівняннями (11.3), забезпечують відповідність значень керованих параметрів, які визначають періодичність та обсяги поставок продукції на склад, їхньому змісту – вони повинні бути додатними.

11.2. Аналітичне розв'язування задачі оптимального управління багатопродуктовими запасами

Математично задача (11.1) – (11.5) являє собою задачу нелінійного програмування з обмеженнями–рівняннями та обмеженнями–нерівностями. Для аналітичного знаходження її розв'язку задачу доцільно дещо спростити.

Вилучимо допоміжні змінні y_j , $j = \overline{1, n}$, підставивши в цільову функцію замість них відповідні вирази з рівнянь (11.2). Одержимо задачу:

$$\left. \begin{aligned} z &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{2} c_{1j} q_j + \frac{c_{3j}}{T_j} \right) \rightarrow \min \\ q_j &= r_j T_j, \quad j = \overline{1, n} \\ \sum_{j=1}^n a_j q_j &\leq A \\ T_j &> 0, \quad j = \overline{1, n} \end{aligned} \right\} \quad (11.6)$$

Знайдемо розв'язок задачі (11.6) аналітичним методом.

Побудуємо для задачі (11.6) узагальнену функцію Лагранжа (у лівій частині через q , T і λ буде позначено вектори відповідних змінних):

$$L(q, T, \lambda, \mu) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{2} c_{1j} q_j + \frac{c_{3j}}{T_j} \right) + \sum_{j=1}^n \lambda_j (q_j - r_j T_j) + \mu \left(\sum_{j=1}^n a_j q_j - A \right),$$

де лагранжів множник $\mu \geq 0$ можна інтерпретувати як штраф у випадку, коли максимально можливий розмір запасів перевищуватиме місткість складу.

Далі скористаємося теоремою Куна–Таккера та запишемо умови оптимальності для задачі (11.6):

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{1}{2} c_{1j} + \lambda_j + \mu a_j = 0, \quad j = \overline{1, n} \quad (11.7)$$

$$\frac{\partial L}{\partial T_j} = -\frac{c_{3j}}{T_j^2} - \lambda_j r_j = 0, \quad j = \overline{1, n} \quad (11.8)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = q_j - r_j T_j = 0, \quad j = \overline{1, n} \quad (11.9)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = \sum_{j=1}^n a_j q_j - A \leq 0 \quad (11.10)$$

$$\mu \left(\sum_{j=1}^n a_j q_j - A \right) = 0 \quad (11.11)$$

З рівнянь (11.7) – (11.9) послідовно знаходимо:

$$\lambda_j = -\frac{c_{1j}}{2} - \mu a_j, \quad j = \overline{1, n} \quad (11.12)$$

$$T_j = \sqrt{\frac{2c_{3j}}{r_j(c_{1j} + 2\mu a_j)}}, \quad j = \overline{1, n} \quad (11.13)$$

$$q_j = \sqrt{\frac{2r_j c_{3j}}{c_{1j} + 2\mu a_j}}, \quad j = \overline{1, n} \quad (11.14)$$

Отже, для визначення розв'язку задачі (11.6) лишається знайти оптимальне значення μ^* множника Лагранжа μ . Це можна зробити, залучаючи умови (11.11) та (11.10), у такий спосіб.

Спочатку покладемо $\mu^* = 0$. Тоді $q_j^* = \sqrt{\frac{2r_j c_{3j}}{c_{1j}}}$, $j = \overline{1, n}$, що повністю

відповідає розв'язкам (10.21) відповідних однопродуктових задач. Якщо ці обсяги поповнення запасів задовольняють обмеження щодо місткості складу, багатопродуктову задачу оптимального управління запасами розв'язано.

У супротивному випадку, коли ці значення обсягів поповнення запасів не відповідають нерівності (11.10), їх потрібно зменшити, збільшивши значення множника μ /дивись (11.14)/. Тобто оптимальне значення μ^*

множника Лагранжа μ буде додатним: $\mu^* > 0$. З умови (11.11) випливає, що це значення μ^* має задовольняти рівняння:

$$\sum_{j=1}^n a_j \sqrt{\frac{2r_j c_{3j}}{c_{1j} + 2\mu^* a_j}} - A = 0 \quad (11.15)$$

Таким чином, аналітичний розв'язок задачі оптимального управління багатопродуктовими запасами визначається рівняннями (11.13) – (11.15).

Наближений корінь нелінійного рівняння (11.15) визначаємо або табулюванням за кількома додатними значеннями μ , або ж за допомогою інструменту "**Подбор параметра**" Excel.

11.3. Розв'язування задачі оптимального управління багатопродуктовими запасами на комп'ютері

З використанням обчислювальної техніки існує принаймні два способи розв'язування задачі про оптимальне управління багатопродуктовими запасами. По-перше, це використання інструменту "**Подбор параметра**" для розв'язування рівняння (11.15), якщо така потреба виникатиме. Другий спосіб полягає у зверненні до пакету "**Поиск решения**" та його застосуванні безпосередньо до задачі (11.1) – (11.5). Опрацюємо ці способи на конкретному прикладі, вихідні дані до якого наведено у таблиці 11.1.

Таблиця 11.1

Вихідні дані до задачі оптимального управління багатопродуктовими запасами

Показник	Позначення	Значення			
Номер виду продукції	j	1	2	3	4
Інтенсивність попиту, одиниць продукції за одну добу	r_j	15	5	30	24
Витрати на зберігання одиниці продукції впродовж однієї доби, гривень	c_{1j}	0,15	0,4	0,25	0,07
Витрати на організацію поповнення запасів однією партією продукції, гривень	c_{3j}	200	150	400	328
Площа, потрібна для зберігання одиниці продукції, кв. м	a_j	0,1	0,7	0,3	1,2

Потрібно визначити, з якою періодичністю T_j , $j = \overline{1, n}$, доцільно поповнювати запаси кожного виду продукції, та якими мають бути розміри q_j , $j = \overline{1, n}$, відповідних партій поповнення запасів, щоб загальні середньодобові витрати на зберігання продукції та поповнення запасів були мінімальними, якщо площа складу A дорівнює 4500 квадратних метрів ($A = 4500$).

Відкриємо нову робочу книгу Excel – "B-Pr-Zap.xls" – та на першому аркуші зафіксуємо усі вихідні дані про задачу (рис. 11.1).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Оптимальне управління багатопродуктовими запасами							
2								
3	Вихідні дані до задачі							
4	Номар продукції	1	2	3	4			
5	Інтенсивність попиту	15	5	30	24			
6	Питомі витрати на зберігання, за добу	0,15	0,4	0,25	0,07			
7	Витрати на поповн. запас. однією парт.	200	150	400	328			
8	Площа на од. прод.	0,1	0,7	0,3	1,2			
9								
10	Площа сховища					4500		
11								
12								

Рис. 11.1. Робочий аркуш книги "B-Pr-Zap.xls" з вихідними даними до задачі про оптимальне управління багатопродуктовими запасами

Далі зробимо форму для таблиці про оптимальні параметри стратегії управління багатопродуктовими запасами. Ця таблиця повинна містити інформацію про значення показників періодичності та обсягів поповнення запасів кожного з видів продукції, середньодобових витрат на управління запасами (по кожній продукції окремо та разом), а також про максимально необхідну для зберігання запасів площу сховища, якщо раптом всі поставки відбудуться одночасно. Для розрахунків буде використано формули (11.13), (11.14), (11.2), (11.1), а також суму у правій частині нерівності (11.4).

Потрібне для цих обчислень значення множника μ будемо враховувати у клітинці F22. Все це показано на рис. 11.2. При записі формул, з метою спрощення, замість залежностей (11.13) було використано рівносильні залежності (11.3).

	A	B	C	D	E	F
8	Площа на од. прод.	0,1	0,7	0,3		1,2
9						
10	Площа сховища					4500
11						
12	Параметри оптимальної стратегії управління					
13	Номер продукції	1	2	3	4	
14	Періодичн. поставок	=C15/C5	=D15/D5	=E15/E5	=F15/F5	
15	Розмір партії	=КОРЕНЬ(2*C5*C7/(C6+2*F\$22*C8))	=КОРЕНЬ(2*D5*D7/(D6+2*F\$22*D8))	=КОРЕНЬ(2*E5*E7/(E6+2*F\$22*E8))	=КОРЕНЬ(2*F5*F7/(F6+2*F\$22*F8))	
16	Витрати (за добу)	=0,5*C6*C15+C7/C14	=0,5*D6*D15+D7/D14	=0,5*E6*E15+E7/E14	=0,5*F6*F15+F7/F14	
17						
18	Загальні середньодобові витрати					=СУММ(C16:F16)
19						
20	Максимальна потреба у площі сховища					=СУММПРОИЗВ(C8:F8;C15:F15)
21						
22	Множник Лагранжа (мю)					
23						

Рис. 11.2. Підготовка таблиці про оптимальні параметри стратегії управління багатопродуктовими запасами

Після запису усіх потрібних розрахункових формул, як це показано на рис. 11.2, ми одразу ж автоматично отримаємо розв'язки усіх однопродуктових задач оптимального управління запасами (рис. 11.3), оскільки порожня клітинка F22 відповідає нульовому значенню множника μ .

	A	B	C	D	E	F	G
11							
12	Параметри оптимальної стратегії управління						
13	Номер продукції	1	2	3	4		
14	Періодичн. поставок	13,33333	12,24745	10,32796	19,76047		
15	Розмір партії	200	61,23724	309,8387	474,2513		
16	Витрати (за добу)	30	24,4949	77,45967	33,19759		
17							
18	Загальні середньодобові витрати					165,1522	
19							
20	Максимальна потреба у площі сховища					724,9192	
21							
22	Множник Лагранжа (мю)						
23							

Рис. 11.3. Результати планування без обмеження щодо площі сховища

Бачимо, що наявної площі сховища (4500 кв. м) цілком вистачає, щоб зберігати усю продукцію навіть за умов одночасного надходження на склад

усіх поставок (максимальна потреба у площі становить менше 725 м², що показано у клітинці F20). І навіть округлювання у більшу сторону до цілих значень усіх тривалостей циклів поставок (відповідно, до 14, 13, 11 і 20 днів) та збільшення обсягів партій поповнення запасів до 210, 65, 330 і 480 одиниць відповідної продукції (що практично не впливає на загальні середньодобові витрати) збільшить максимальні потреби у площі сховища до 741.5 м², що теж не перевищує площі сховища 4500 м².

Тепер розглянемо складніший випадок – коли площі сховища буде недостатньо для зберігання усієї продукції у випадку, якщо вона надійде до сховища одночасно.

Поміняємо умову задачі щодо площі складу. Припустимо, що площа складу дорівнює 500 м² ($A = 500$).

Занесемо на другий аркуш нашої книги "B-Pr-Zap.xls" копію **Листа 1** та вкажемо у клітинці F10 нове значення площі складу: 500.

На панелі інструментів Excel оберемо "**Сервис**", в меню якого скористаємося інструментом "**Подбор параметра...**".

У діалоговому вікні інструменту зазначимо, що в клітинці F20 слід встановити значення 500, змінюючи при цьому значення параметра μ , яке знаходиться у клітинці F22 (рис. 11.4).

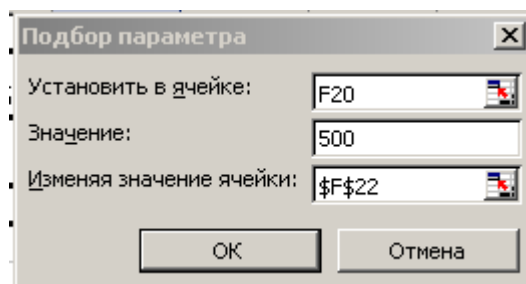


Рис. 11.4. Налаштування діалогового вікна підбору параметра для визначення оптимального значення множника μ

Натиснемо у діалоговому вікні **ОК** та через мить побачимо повідомлення про результати обчислень (рис. 11.5).

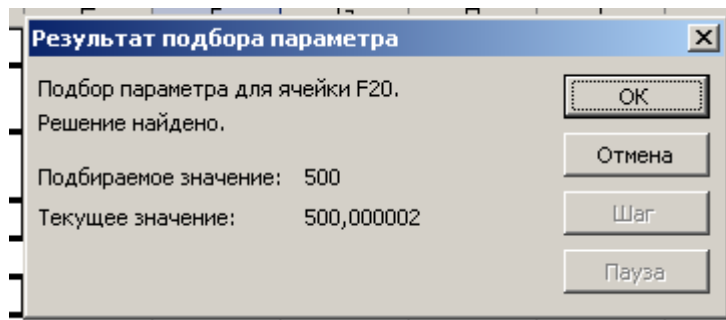


Рис. 11.5. Результати пошуку оптимального значення μ^* множника Лагранжа μ з використанням інструменту підбору параметра

Натиснемо у діалоговому вікні "Результат подбора параметра" ОК та прочитаємо на екрані інформацію про оптимальну стратегію управління багатопродуктовими запасами (рис. 11.6). Лишається заокруглити значення тривалостей періодів поповнення запасів, але зараз слід до уваги, що ці заокруглювання можуть істотно вплинути на потреби у площі складу.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Оптимальне управління багатопродуктовими запасами						
2							
3	Вихідні дані до задачі						
4	Номер продукції		1	2	3	4	
5	Інтенсивність попиту		15	5	30	24	
6	І питомі витрати на зберігання, за добу		0,15	0,4	0,25	0,07	
7	Витрати на поповн. запас однією парт.		200	150	400	328	
8	Площа на од. прод.		0,1	0,7	0,3	1,2	
9							
10	Площа сховища					500	
11							
12	Параметри оптимальної стратегії управління						
13	Номер продукції		1	2	3	4	
14	Періодичн. поставок		12,9362	11,3535	9,79304	12,2473	
15	Розмір партії		194,042	56,7677	293,791	293,934	
16	Витрати (за добу)		30,0137	24,5653	77,5692	37,0692	
17							
18	Загальні середньодобові витрати					169,217	
19							
20	Максимальна потреба у площі сховища					500	
21							
22	Множник Лагранжа (мю)					0,04676	
23							
24							
25							
26							

Рис. 11.6. Робочий лист з результатами розв'язування багатопродуктової задачі управління запасами способом підбору параметра

Опрацюємо тепер спосіб розв’язування багатопродуктової задачі оптимального управління запасами (11.1) – (11.5) з використанням інструменту пошуку рішення. Для цього відведемо третій аркуш нашої робочої книги, на який спочатку знову повністю скопіюємо **Лист 1**.

Вкажемо у клітинці F10 значення площі складу: 500. Уберемо рядок 22 (множник Лагранжа зараз не потрібний). Очистимо клітинки C15:F15 (раніше там містилися формули для обчислення розмірів партій поповнення запасів через множник Лагранжа μ ; зараз ці значення ми вважатимемо невідомими). Щоб позбутися у клітинках C16:F16 та F18 повідомлення "#ДЕЛ/0!", занесемо у клітинки C15:F15 довільні додатні значення (наприклад, 1).

Активізуємо тепер інструмент пошуку рішення. В його діалоговому вікні вказуємо, що цільовою є клітинка F18. Оптимізаційне спрямування – до мінімуму. Змінним відповідають клітинки C15:F15. Обмеження щодо площі складу: $F20 \leq F10$ (рис. 11.7).

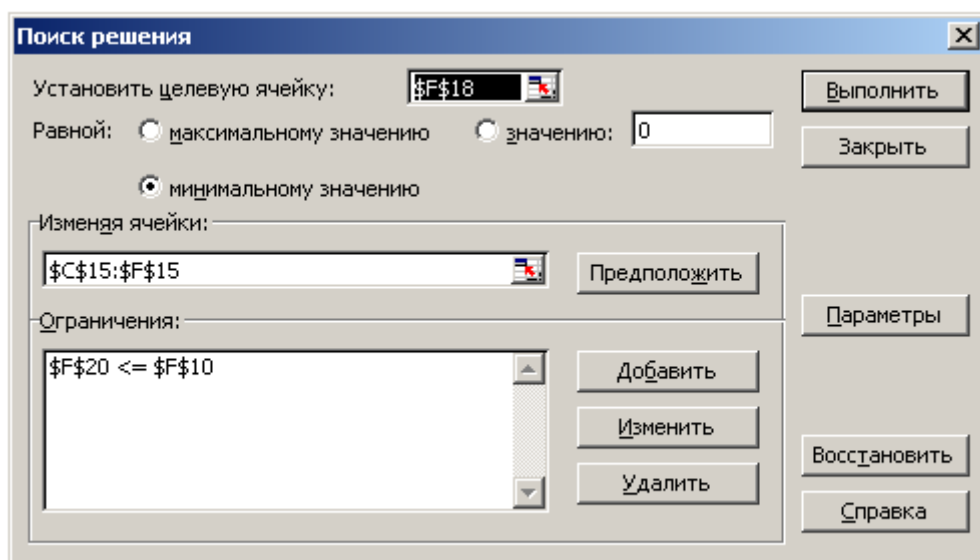


Рис. 11.7. Підготовка інструменту пошуку рішення до оптимізації стратегії управління багатопродуктовими запасами

В параметрах пошуку рішення зазначаємо, що змінні мають бути невід’ємними, після чого запускаємо інструмент на виконання. Результати пошуку рішення наведені на рисунку 11.8. Спостерігаємо, що оптимальна стратегія управління багатопродуктовими запасами враховує площу складу (в клітинці F20 отримали значення 499,9999996) та вимагає щодобових витрат у розмірі 169,2174345 гривень (цільова клітинка F18).

	A	B	C	D	E	F	G
1	Оптимальне управління багатопродуктовими запасами						
2							
3	Вихідні дані до задачі						
4	Номер продукції	1	2	3	4		
5	Інтенсивність попиту	15	5	30	24		
6	Питомі витрати на зберігання, за добу	0,15	0,4	0,25	0,07		
7	Витрати на поповн. запас. однією парт.	200	150	400	328		
8	Площа на од. прод.	0,1	0,7	0,3	1,2		
9							
10	Площа сховища					500	
11							
12	Параметри оптимальної стратегії управління						
13	Номер продукції	1	2	3	4		
14	Періодичн. поставок	12,93624112	11,35361387	9,793024366	12,24724896		
15	Розмір партії	194,0436168	56,76806937	293,790731	293,933975		
16	Витрати (за добу)	30,01371283	24,56526628	77,56924163	37,06921378		
17							
18	Загальні середньодобові витрати					169,2174345	
19							
20	Максимальна потреба у площі сховища					499,9999996	
21							
22							
23							

Рис. 11.8. Робочий лист Excel з першими результатами розв'язування багатопродуктової задачі оптимального управління запасами за допомогою інструменту пошуку рішення

Проте вважати отримані зараз перші результати оптимізації стратегії управління багатопродуктовими запасами цілком задовільними не можна. З практичних міркувань очевидно, що шукані тривалості періодів поповнення запасів та розміри партій відповідної продукції мають бути цілочисловими:

\$C\$14: \$F\$15	=	цел
------------------	---	-----

Але клітинки C14:F14 раніше не були показані як змінні (рис. 11.7), тому при безпосередній спробі ввести це додаткове обмеження Ви отримаєте повідомлення про помилку.

Правильно діяти потрібно таким чином. Внесемо у діалоговому вікні пошуку рішення (воно показане на рис. 11.7) наступні зміни:

1) масив змінних клітинок оберемо таким: \$C\$14: \$F\$15;

2) додамо обмеження:

\$C\$14: \$F\$15	=	цел
------------------	---	-----

3) додамо обмеження, які показують залежність між розміром партій поповнення запасів та періодичністю відповідних поповнень (оскільки раніше введені у клітинки C14:F14 формули вже сприйматися не будуть):

\$C\$14	=	\$C\$15/\$C\$5
\$D\$14	=	\$D\$15/\$D\$5
\$E\$14	=	\$E\$15/\$E\$5
\$F\$14	=	\$F\$15/\$F\$5

Далі дамо команду: "**Выполнить**" (залишивши в параметрах пошуку рішення прапорець у стані: "Неотрицательные переменные").

Результати обчислень показано на рис. 11.9. Переконаємося, що усі значення в клітинках C14:F15 є цілими, тобто знайдена стратегія управління запасами відповідає вимогам практичної зручності.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Оптимальне управління багатопродуктовими запасами						
2							
3	Вихідні дані до задачі						
4	Номер продукції		1	2	3	4	
5	Інтенсивність попиту		15	5	30	24	
6	Питомі витрати на зберігання, за добу		0,15	0,4	0,25	0,07	
7	Витрати на поповн. запас. однією парт.		200	150	400	328	
8	Площа на од. прод.		0,1	0,7	0,3	1,2	
9							
10	Площа сховища					500	
11							
12	Параметри оптимальної стратегії управління						
13	Номер продукції		1	2	3	4	
14	Періодичн. поставок		13	12	10	12	
15	Розмір партії		195	60	300	288	
16	Витрати (за добу)		30,00961538	24,5	77,5	37,41333333	
17							
18	Загальні середньодобові витрати					169,4229487	
19							
20	Максимальна потреба у площі сховища					497,1	
21							
22							
23							

Рис. 11.9. Робочий лист Excel з кінцевими результатами розв'язування багатопродуктової задачі оптимального управління запасами за допомогою інструменту пошуку рішення

Задачу оптимального управління багатопродуктовими запасами розв'язано.

11.4. Завдання для самостійного опрацювання

1. Наведіть приклади, коли задачу оптимального управління запасами потрібно розглядати саме як багатопродуктову.

2. Покажіть, що задачу знаходження оптимального значення μ^* множника Лагранжа μ , яке потрібне для розв'язування задачі (11.6) аналітичним методом, можна, керуючись залежностями (11.13) – (11.14), звести до оптимізаційної задачі. Побудуйте таку задачу та розв'яжіть її за допомогою інструменту пошуку рішення Excel.

3. Охарактеризуйте та графічно проілюструйте залежність оптимальних загальних середньодобових витрат на зберігання продукції та поповнення запасів z^* від площі складу A на прикладі п'ятипродуктової задачі управління запасами з вихідними даними, що наведені у таблиці 11.2.

Таблиця 11.2

Вихідні дані до задачі оптимального управління
п'ятипродуктовими запасами

Показник	Номер виду продукції				
	1	2	3	4	5
Інтенсивність попиту, одиниць продукції за одну добу	18	25	14	8	40
Витрати на зберігання одиниці продукції впродовж однієї доби, гривень	0,01	0,15	0,02	0,35	0,18
Витрати на організацію поповнення запасів однією партією продукції, гривень	300	120	450	621	237
Площа, потрібна для зберігання одиниці продукції, кв. м	0,3	0,45	0,25	1,2	0,15

ЛІТЕРАТУРА

1. Алькема В.Г. Логистика: Учебно-методическое пособие. – К.: Університет економіки та права "КРОК", 2004. – 164 с.
2. Бакаев А.А., Ермольев Ю.М., Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И. Математические методы в планировании и экономических расчетах. – К.: Наукова думка, 1968. – 224 с.
3. Бакаєв О.О., Грищенко В.І., Бажан Л.І., Бакаєв Л.О. Мікроекономічне моделювання і інформаційні технології. – К.: Наукова думка, 2003. – 182 с.
4. Бауэрсокс Д. Логистика. Интегрированная цепь поставок. – М.: Олимп-Бизнес, 2005. – 640 с.
5. Бродецкий Г.Л. Моделирование логистических систем. Оптимальные решения в условиях риска. – М.: Вершина, 2006. – 376 с.
6. Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Задачи линейного программирования транспортного типа. – М.: Наука, 1969. – 384 с.
7. Деордица Ю.С., Савченко В.Т. Компьютерные технологии в экономике и менеджменте: Учебное пособие. – Луганск: ВУГУ, 1999. – 326 с.
8. Джонсон Дж., Вуд Д., Вордлоу Д., Мерфи П. Современная логистика. – М.: Вильямс, 2002. – 624 с.
9. Долгов А. Логистический менеджмент фирмы. Концепция, методы, модели. – СПб.: Бизнес-Пресса, 2005. – 368 с.
10. Друкер П. Эффективное управление. Экономические задачи и оптимальные решения. – М.: ФАИР-ПРЕСС, 2001. – 288 с.
11. Канторович Л.В., Горстко А.Б. Оптимальные решения в экономике. – М.: Наука, 1972. – 231 с.
12. Карагодова О.О., Кігель В.Р, Рожок В.Д. Дослідження операцій: Навчальний посібник. – К.: ЦУЛ, 2007. – 256 с.
13. Кігель В.Р. Элементы линейного, целочисленного, нелинейного программирования: Навчальний посібник. – К.: ІСДО, 1995. – 400 с.
14. Крикавський Є.В. Логістичне управління: Підручник – Львів: Львівська політехніка, 2005. – 684 с.
15. Кристофидас Н. Теория графов. Алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978. – 432 с.
16. Линдерс М.Р., Фирон Х.Е. Управление снабжением и запасами. Логистика. – СПб.: Виктория плюс, 2002. – 768 с..
17. Майника Э. Алгоритмы оптимизации на сетях и графах. – М.: Мир, 1981. – 323 с.
18. Михалевич В.С., Трубин В.А., Шор Н.З. Оптимизационные задачи производственно-транспортного планирования: Модели, методы, алгоритмы. – М.: Наука, 1986. – 264 с.
19. Окландер М. Логістика. Навчальний посібник. – К.: Зовнішня торгівля, 2005. – 234 с.
20. Рыжиков Ю.И. Управление запасами. – М.: Наука, 1969. – 344 с.
21. Сергиенко И.В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. – К.: Наукова думка, 1985. – 384 с.

22. Сток Д.Р., Дуглас М.Л. Стратегическое управление логистикой. Учебник. – М.: Инфра-М, 2005. – 797 с.
23. Таха Х. Введение в исследование операций. – М.: Вильямс, 2001. – 912 с.
24. Терехов Л.Л. Экономико–математические методы: Учебное пособие. – М.: Статистика, 1968. – 300 с.
25. Ульянченко О.В. Дослідження операцій в економіці: Підручник. – Харків: Гриф, 2002. – 580 с.
26. Уотерс Д. Логистика. Управление цепью поставок. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003. – 503 с.
27. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. – М.: Мир, 1974. – 520 с.
28. Хэнсмен Ф. Применение математических методов в управлении производством и запасами. – М.: Прогресс, 1966. – 280 с.
29. Эддоус М., Стэнсфилд Р. Методы принятия решений. – М.: Аудит, ЮНИТИ, 1997. – 590 с.

Навчальне видання

Кігель Володимир Романович,
завідувач кафедри фінансів, професор
Українського гуманітарного інституту;
професор Університету економіки та права "КРОК";
кандидат економічних наук, доцент

Оптимізація логістичних рішень

Навчальний посібник
для студентів спеціальності "Логістика"
вищих навчальних закладів України

Текст надруковано в авторській редакції