«Торгівля цінними паперами»
Підручник за редакцією В.І. Грушка

Розділ IX. Фінансові обчислення

В.Р. Кігель к.е.н., доцент

Ключові слова: дисконтування, ставка дисконту, чистий зведений дохід (NPV), термін окупності (PP), внутрішня норма дохідності (IRR), індекс рентабельності (PI), лотерея, очікувана дохідність, дисперсія, стандартне відхилення, функція корисності, детермінований еквівалент, ставлення до ризику.

Дисконтування. Численні проблеми прийняття фінансових рішень стосуються випадків, коли витрати та доходи розподілені в часі. Кожний фінансовий проект характеризується:

- потоком витрат $(V_1, \ldots, V_t, \ldots, V_T)$,
- потоком доходів $(D_1, \ldots, D_t, \ldots, D_T)$, та, як результат,
- потоком прибутків $(P_1, \ldots, P_t, \ldots, P_T)$,

де T – довжина (тривалість) планового періоду, V_t і D_t – відповідно, витрати та доходи упродовж окремого t–го проміжку часу з цього періоду, а $P_t = D_t - V_t$ – прибуток для цього окремого часового проміжку ($t = 1, .., T$).

Найперша задача полягає у тому, щоб визначити узагальнені показники зазначених потоків витрат, доходів та прибутків. Необхідність вирішення цієї задачі обумовлена тим, що за цінністю одні й ті ж самі грошові суми в різні моменти часу мають різну цінність для фінансового менеджера (власника капіталу, інвестора, особи, яка приймає відповідні фінансові рішення – ОПР). Причинами цього є інфляційно–дефляційні процеси на товарних та фінансових ринках, можливості отримати в майбутньому певні результати (позитивні чи негативні) від сьогоднішніх інвестиційних вкладень, а також зміни у часі індивідуальних переважань ОПР, викликані об’єктивними закономірностями та суб’єктивними чинниками.

Нехай λ_t – визначений ОПР коефіцієнт еквівалентного заміщення одиниці грошей у проміжку часу t певною грошовою сумою з попереднього проміжку часу ($t-1$), тобто що ОПР вважає два наступні різні грошові потоки рівноцінними:

$$(G_1, \ldots, G_{t-1} = 0, G_t = 1, \ldots, G_T),$$

$$(G_1, \ldots, G_{t-1} = \lambda_t, G_t = 0, \ldots, G_T).$$

Тоді для грошового потоку $(G_1, \ldots, G_t, \ldots, G_T)$ величина загальної, зведеної до початку планового періоду грошової суми цього потоку – G – дорівнюватиме:

$$G = \lambda_1 G_1 + \ldots + (\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_t) G_t + \ldots + (\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_T) G_T .$$

Якщо коефіцієнт λ_t еквівалентного заміщення одиниці грошей у проміжку часу t грошовою сумою з попереднього проміжку часу ($t-1$) не залежить від t, тобто весь час залишається сталим та дорівнює λ, отримаємо таку формулу зведення потоку прибутків:

$$G = \sum_{t=1}^{T} \lambda^t G_t ,$$

в якій множники λ^t, $t = 1, \ldots, T$, називаються коефіцієнтами дисконтування (зведення), а G – дисконтованою (зведеною до початку планового періоду) величиною грошового потоку $(G_1, \ldots, G_t, \ldots, G_T)$.

Формулу зведення часто подають через норму (або ставку) дисконту $r = \frac{1}{\lambda} - 1$:

$$G = \sum_{t=1}^{T} \frac{G_t}{(1+r)^t} .$$

В останній формулі замість дисконтних множників $\lambda_t = \lambda^t$, які використовувалися раніше, акцент зроблено на ставці дисконту r:

$$\lambda_t = \frac{1}{(1+r)^t}, \; t = \overline{1, T} .$$

Приклад 1. Якщо розглядати два потоки прибутків $A=(2,5,7)$ і $B=(4,4,6)$, тоді за норми дисконту $r=0.2$ розміри зведених до початку планового періоду прибутків за цими потоками дорівнюватимуть:

$$P^A=\frac{2}{1+0.2}+\frac{5}{(1+0.2)^2}+\frac{7}{(1+0.2)^3}=1.67+3.47+4.05=9.19,$$

$$P^B=\frac{4}{1+0.2}+\frac{4}{(1+0.2)^2}+\frac{6}{(1+0.2)^3}=3.33+2.78+3.47=9.58,$$

тобто другий потік прибутків є більшим (більш прибутковим), аніж перший.

Зауваження. Ставку дисконту r часто вважають додатною. Але це неправильно, оскільки додатним можна вважати лише дисконтний множник λ. Бачимо, що нерівність $r>0$ виконуватиметься лише за умови, що $0<\lambda<1$, тобто коли цінність грошей у часі зменшується. Водночас, якщо цінність грошей у часі не змінюється ($\lambda=1$), або коли цінність грошей у часі збільшуватиметься ($\lambda>1$), ставка дисконту, відповідно, буде або нульовою ($r=1$), або від'ємною. Отже, в загальному випадку, для ставки дисконту r завжди справджується нерівність: $r>-1$.

Показники економічної ефективності фінансового проекту. В світовій та вітчизняній практиці фінансового менеджменту та інвестиційного оцінювання знайшли використання, передусім, наступні чотири показники економічної ефективності інвестиційних (фінансових) проектів:

- чистий зведений дохід (NPV, net present value),
- термін окупності (PP, pay–back period),
- внутрішня норма дохідності (IRR, internal rate of return),
- індекс рентабельності інвестицій (PI, profitability index).

Як зазначають Р.Брейлі та С.Майєрс [1], принцип чистої зведеної вартості для оцінювання тривалих інвестиційних проектів було запропоновано І.Фішером у 1930 році у його книзі «The Theory of Interest». Питання про термін окупності інвестицій, який розраховуватиметься з урахуванням ставки дисконту, починає обговорюватися з опублікованої в

«Journal of Business» (1955, № 28) статті М.Гордона «The Pay–Off Period and the Rate of Profit». З 1955 р. розпочинається також дослідження запропонованого Дж.М.Кейнсом показника внутрішньої норми дохідності (Ж.Лоріе та Л.Севаж, Е.Соломон, А.Алчіан тощо). Індекс рентабельності інвестицій досліджується, зокрема, починаючи із статті Б.Шваба та П.Ластінга, надрукованої у 1969 р. у «Journal of Finance», (№ 24.

Науковці, хоч і не заперечують проти комплексного оцінювання інвестиційних проектів за усіма вищезазначеними критеріями, віддають перевагу показнику чистого зведеного доходу. Цей показник обчислюється за формулою:

$$N = \sum_{t=1}^{T} \frac{D_t - V_t}{(1+r)^t}, \quad \text{де:}$$

N – чистий дохід за проектом, зведений до початку планового періоду;

T – тривалість планового періоду (життєвого циклу проекту);

t – номер окремого часового проміжку з планового періоду ($t = \overline{1, T}$);

D_t – вартісна оцінка поточних результатів (доходів), пов'язаних із проектом, у $t-$му часовому проміжку;

V_t – вартісна оцінка поточних інвестиційних та неінвестиційних витрат, пов'язаних із реалізацією проекту, у $t-$му часовому проміжку;

r – нормативний коефіцієнт економічної ефективності інвестицій (ставка або норма дисконту).

Наступним важливим показником оцінювання інвестиційних проектів є строк окупності інвестицій S. Він являє собою такий мінімальний момент часу від початку планового періоду, починаючи з якого інтегральний ефект від реалізації проекту стає невід'ємним, причому залишається невід'ємним і надалі. Для обчислення строку окупності S можна скористатися формулами:

$$\begin{cases} \sum_{t=1}^{S-1} \frac{D_t - V_t}{(1+r)^t} < 0, \\ \sum_{t=1}^{k} \frac{D_t - V_t}{(1+r)^t} \geq 0 \text{ для всіх } \quad k = S, S+1, \dots, T. \end{cases}$$

В свою чергу, показник внутрішньої норми дохідності i інвестиційного проекту показує на таку ставку дисконту, за якою зведені до початку планового періоду доходи дорівнюватимуть зведеним до початку планового періоду витратам:

$$\sum_{t=1}^{T}\frac{D_t}{(1+i)^t}=\sum_{t=1}^{T}\frac{V_t}{(1+i)^t}.$$

Отже, зведений за внутрішньою нормою дохідності до початку планового періоду прибуток інвестиційного проекту дорівнює нулю. Тому внутрішня норма дохідності обчислюється як корінь рівняння:

$$\sum_{t=1}^{T}\frac{P_t}{(1+i)^t}=0.$$

Нарешті, індекс рентабельності інвестицій π являє собою відношення зведеного на початок планового періоду потоку прибутків до зведеного на початок планового періоду потоку витрат:

$$\pi=\frac{\sum_{t=1}^{T}\frac{P_t}{(1+r)^t}}{\sum_{t=1}^{T}\frac{V_t}{(1+r)^t}}.$$

Приклад 2. Обчислимо показники економічної ефективності інвестиційного проекту тривалістю 12 місяців, якщо місячна ставка дисконту $r=0.02$. Вихідні дані для розрахунків наведено в таблиці 1.

Таблиця 1

Щомісячні поточні витрати та доходи

за інвестиційним проектом, тис. грн.

Щомісячні поточні	Місяць життєвого циклу проекту											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
витрати	10	8	7	6	6	5	5	4	5	5	6	7
доходи	1	2	5	8	9	11	11	12	13	13	14	14

Для обчислення показника чистого зведеного доходу N за інвестиційним проектом знайдемо, виходячи з місячної ставки дисконту $r = 0.02$, дисконтні множники (показані в останньому – довідковому рядку таблиці 2) та розрахуємо за даними таблиці 1 щомісячні дисконтовані витрати, доходи та прибутки (показані в основній частині таблиці 2). Підсумовуванням елементів відповідних рядків таблиці 2 знаходимо, що загальні зведені витрати складатимуть 65.904 тис. грн., загальний зведений дохід – 96.583 тис. грн., загальний зведений прибуток, тобто зведений чистий дохід за інвестиційним проектом дорівнює 30.679 тис. грн.

Таблиця 2

Щомісячні зведені до початку планового періоду витрати, доходи та прибутки за інвестиційним проектом, тис. грн.

(місячна ставка дисконту $r = 0.02$)

Показник	Місяць життєвого циклу проекту												Σ
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
витрати	9,80	7,69	6,60	5,54	5,43	4,44	4,35	3,41	4,18	4,10	4,83	5,52	65,90
доходи	0,98	1,92	4,71	7,39	8,15	9,77	9,58	10,24	10,88	10,67	11,26	11,04	96,58
прибутки	–8,82	–5,77	–1,89	1,85	2,72	5,33	5,22	6,83	6,69	6,56	6,43	5,52	30,68
Довідково: дисконтні множники	0,98	0,96	0,94	0,92	0,91	0,89	0,87	0,85	0,84	0,82	0,80	0,79	–

Щоб знайти строк окупності S інвестиційного проекту, обчислимо накопичені щомісячні чисті зведені доходи, починаючи з першого місяця життєвого циклу нашого проекту (таблиця 3). Помічаємо, що мінімальний момент часу, починаючи з якого накопичений щомісячний чистий зведений дохід від реалізації проекту стає та залишається надалі невід’ємним, дорівнює 8 місяців. Отже, термін окупності інвестиційного проекту – в межах до 8 місяців, що проілюстровано рисунком 1.

Таблиця 3

Щомісячні накопичені чисті зведені доходи за інвестиційним проектом, тис. грн.

Місяць життєвого циклу проекту											
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
–8,824	–14,591	–16,475	–14,627	–11,910	–6,582	–1,359	5,469	12,163	18,726	25,160	30,679

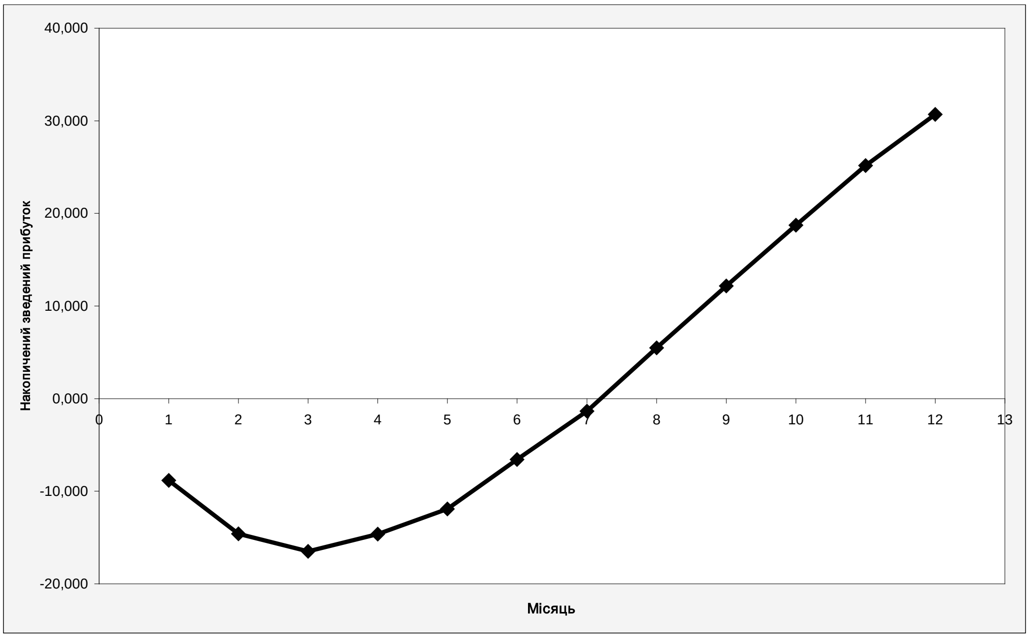

Рис. 1. Динаміка накопиченого щомісячного зведеного прибутку упродовж життєвого циклу інвестиційного проекту.

Для наближеного обчислення внутрішньої норми дохідності i доцільно побудувати графік залежності чистого зведеного доходу N від розміру місячної ставки дисконту r (рис. 2).

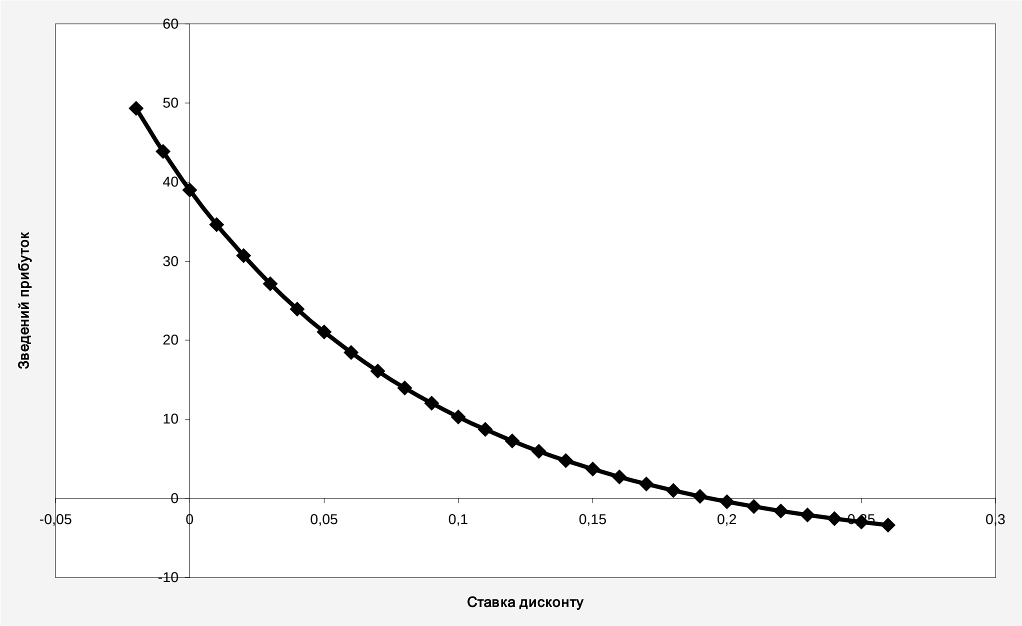

Рис. 2. Залежність чистого зведеного прибутку від розміру місячної ставки дисконту.

Внутрішня норма дохідності відповідає нульовому рівню чистого зведеного доходу: $i \approx 0.2$. Це означає, що проект може виявитися збитковим лише тоді, коли нормативна місячна ставка дисконту r перевищуватиме це значення. (Нагадаємо, що визначена інвестором нормативна місячна ставка дисконту дорівнює 0.02, тобто її припустимі варіації в межах 0.01-0.04, не призводитимуть до радикальної втрати прибутковості цього проекту).

Нарешті, для обчислення індексу рентабельності інвестицій π скористаємося підсумковими значеннями зведених до початку планового періоду прибутків та витрат, наведеними в останньому стовпчику таблиці 2:

$$\pi = \frac{30.679}{65.904} = 0.4655.$$

Приклад закінчено.

Оцінювання майбутнього доходу інвестора як випадкової величини. Майбутній дохід від наявних у інвестора цінних паперів (задіяних напрямів інвестування) слушно вважати випадковою величиною. Причому, як вказують, зокрема, У.Шарп, Дж.Гордон та Дж.Бейлі, збільшення очікуваної дохідності фінансових інструментів супроводжується, як правило, і збільшенням ризику щодо можливого відхилення майбутньої дохідності від її очікуваного рівня (таблиця 4).

Таблиця 4

Статистичні оцінки показників річної дохідності окремих груп фінансових інструментів за період тривалістю 58 років (1926–1993), %

Група цінних паперів	Очікувана дохідність	Стандартне відхилення
Векселі казначейства	3,74	3,32
Державні облігації	5,36	8,67
Облігації корпорацій	5,90	8,46
Звичайні акції	12,34	20,44

Отже, якщо майбутній дохід вважати випадковою величиною, постає проблема щодо оцінювання цього випадкового доходу. Щоб докладно опрацювати це питання, позначимо через x – детермінований (визначений, невипадковий), а через ξ – випадковий дохід із можливими значеннями в межах від a до b грошових одиниць ($a < b$), а через p – деяку імовірність: $0 \leq p \leq 1$.

Оцінювання дискретного випадкового доходу. Дискретну випадкову величину доходу умовно називають *лотереєю*. Найпростіша з лотерей має лише два можливих наслідки. Отже, лотереєю $< a, p, b >$ є така випадкова величина доходу ξ, яка з імовірністю $(1-p)$ може набрати гірше значення a та з імовірністю p краще значення b.

Дохід $\hat{x}_p$ вважається детермінованим еквівалентом лотереї $< a, p, b >$, якщо він є рівноцінним до цієї лотереї: $\hat{x}_p \sim < a, p, b >$. Для довільної імовірності $p \in [0, 1]$ детермінований еквівалент $\hat{x}_p$ завжди існує, причому $\hat{x}_0 = a$, $\hat{x}_1 = b$, а залежність $\hat{x}_p$ від p є неперервно зростаючою.

Це означає, в свою чергу, що для довільного детермінованого рівня доходу $x \in [a, b]$ існує така імовірність p_x, за якої x є детермінованим еквівалентом лотереї $< a,\ p_x, b >$, причому $p_a = 0$, $p_b = 1$, а залежність $p_{\hat{x}}$ від $\hat{x}$ є неперервно зростаючою на відрізку $[a, b]$.

Покладемо для довільного детермінованого рівня доходу $x \in [a, b]$ $f(x) = p_x$. Визначена у такий спосіб числова функція f:

$$u = f(x), \quad x \in [a, b],$$

називається функцією корисності доходу. Ця функція є неперервно зростаючою на відрізку $[a, b]$ та нормованою значеннями 0 (найменше, відповідає найгіршому рівню доходу) та 1 (найбільше значення функції корисності, відповідає найкращому рівню доходу). Причому, за побудовою, вона має властивість:

$$x \sim < a,\ f(x), b > \text{ для довільного } x \in [a, b].$$

Корисність $f(\hat{x}_p)$ детермінованого еквіваленту $\hat{x}_p$ лотереї $< a,\ p, b >$ саме й визначає корисність цієї лотереї. Тобто, корисність лотереї – це корисність її детермінованого еквіваленту.

Таким чином, оцінювати просту лотерею можна або її корисністю, або ж її детермінованим еквівалентом.

Розглянемо, далі, лотерею $L = < \frac{x_1}{p_1}, \quad \ldots, \frac{x_m}{p_m} >$, в якій випадкова величина доходу ξ може набирати значень $x_i \in [a, b]$ з ймовірностями, відповідно, $p_i \geq 0$ $(i = \overline{1, m})$, де $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$.

(Проста лотерея $< a,\ p, b >$, яка була уведена першою, у новій формі запису виглядала б так: $< \frac{a}{1-p}, \quad \frac{b}{p} >$)

Щоб визначити детермінований еквівалент та корисність лотереї $L = < \frac{x_1}{p_1}, \quad \ldots, \frac{x_m}{p_m} >$, вивчимо її. Зазначимо, що кожний з можливих наслідків x_i цієї лотереї L є рівноцінним до лотереї $< a,\ f(x_i), b >$:

$$x_i \sim < a,\ f(x_i), b >,\ i = \overline{1, m}\ ,$$

тому L є тотожною до лотереї $L_1 = < \frac{< a,\ f(x_1), b >}{p_1}, \quad \ldots, \frac{< a,\ f(x_m), b >}{p_m} >$, тобто детермінований еквівалент $\hat{x}_L$ лотереї L є одночасно і детермінованим еквівалентом лотереї L_1.

В свою чергу, у кожній з лотерей $< a,\ f(x_i), b >$ кращий наслідок b може статися з імовірністю $f(x_i),\ i = \overline{1, m}$. Тому в лотереї L_1 цей наслідок b може статися з імовірністю p_L, що дорівнює:

$$p_L = \sum_{i=1}^{m} f(x_i) p_i \,.$$

Отже, лотерея L_1 є, фактично, лотереєю $< a, p_L, b >$, корисність якої дорівнює p_L, тобто детермінований еквівалент $\hat{x}_L$ і лотереї L_1, і тотожної до неї вихідної лотереї L ми можемо знайти за функцією корисності доходу f з рівняння:

$$f(\hat{x}_L) = p_L \,.$$

Остаточно для лотереї $L = < \frac{x_1}{p_1}, \quad \ldots, \frac{x_m}{p_m} >$ маємо рівність:

$$f(\hat{x}_L) = \sum_{i=1}^{m} f(x_i) p_i \,, \qquad (1)$$

яка свідчить, що корисність лотереї дорівнює очікуваній корисності її можливих наслідків.

В свою чергу, детермінований еквівалент $\hat{x}_L$ лотереї $L = < \frac{x_1}{p_1}, \quad \ldots, \frac{x_m}{p_m} >$ дорівнює:

$$\hat{x}_L = f^{-1}(\sum_{i=1}^{m} f(x_i)p_i),$$

де f^{-1} – це функція, яка є оберненою до функції корисності доходу f.

Оцінювання неперервного випадкового доходу. Коли майбутній дохід розглядається як неперервна випадкова величина ξ, що має на відрізку $[a,b]$ функцію щільності розподілу імовірностей $p(x)$:

$$p(x) \geq 0,\ x \in [a,b];\ \int_a^b p(x)dx = 1,$$

детермінований еквівалент $\hat{x}_\xi$ такого неперервного випадкового доходу, за аналогією до дискретного випадку, визначається рівнянням:

$$f(\hat{x}_\xi) = \int_a^b f(x)p(x)dx, \qquad (2)$$

де f, як і раніше, – функція корисності детермінованого доходу x, визначена відрізку $[a,b]$, а $f(\hat{x}_\xi)$, відповідно, – корисність випадкового доходу ξ.

Формули (1) та (2) називають формулами очікуваної корисності випадкового доходу ξ, а результат обчислення за цими формулами позначають через $\bar{u}$, щоб змістовно розрізняти очікувану корисність випадкового доходу та корисність u детермінованого доходу.

Рівності (1) та (2) не порушаться, якщо щодо функції корисності доходу f виконати позитивне лінійне перетворення $f \to Af + B$, де $A > 0$ і B – деякі сталі дійсні числа (вимога $A > 0$ потрібна, щоб перетворена функція $Af(x) + B$ зберігалася зростаючою на відрізку $[a,b]$). Це означає, що у разі потреби введені раніше умови нормування функції корисності доходу можна замінити на інші, підбираючи при оцінюванні корисності доходу початок відліку (значенням B) та масштаб вимірювань (значенням A) зручними для оперування з відповідними числами.

Теорему про існування, неперервність та єдиність с точністю до довільного позитивного лінійного перетворення функції корисності сформулювали та довели Дж. фон Нейман і О.Моргенштерн – засновники сучасної теорії корисності у прийнятті рішень за умов ризику.

Загальний висновок щодо оцінювання випадкового доходу. Довільний (дискретний або неперервний) випадковий дохід ξ може оцінюватися або його детермінованим еквівалентом $\hat{x}_\xi$, або ж корисністю цього детермінованого еквіваленту $f(\hat{x}_\xi)$, яка обчислюється за формулами очікуваної корисності (1) або (2). Результати оцінювання залежать як від закону (функції щільності) розподілу імовірностей випадкового доходу ξ, так і від функції корисності f, яка відтворює індивідуальні переважання ОПР за умов ризику, тобто індивідуальне ставлення ОПР до ризику. Отже, при оцінюванні випадкового доходу потрібно враховувати індивідуальне ставлення до ризику конкретної ОПР у конкретній фінансовій ситуації.

Основні типи індивідуального ставлення до ризику. Розрізняють, виходячи з особливостей ставлення ОПР до ризику, три основних типи індивідуальних переважань:

– нейтральність,
– несхильність,
– схильність.

ОПР вважається *нейтральною* до ризику, якщо для двох довільних рівнів доходу x' та x'' і для довільної імовірності p $(0 < p < 1)$ детермінований еквівалент $\hat{x}_p$ лотереї $< x', p, x'' >$ збігається з очікуваним рівнем доходу у цій лотереї $\bar{x}_p$: $\hat{x}_p = \bar{x}_p$, де $\bar{x}_p = (1-p)x' + px''$.

ОПР вважається *несхильною* до ризику, якщо для двох довільних рівнів доходу x' та x'' і для довільної імовірності p $(0 < p < 1)$ детермінований еквівалент $\hat{x}_p$ лотереї $< x', p, x'' >$ завжди є меншим від очікуваного рівня доходу $\bar{x}_p$ у цій лотереї: $\hat{x}_p < \bar{x}_p$.

Нарешті, ОПР вважається *схильною* до ризику, якщо для двох довільних рівнів доходу x' і x'' та для довільної імовірності p $(0 < p < 1)$ детермінований еквівалент $\hat{x}_p$ лотереї $< x', p, x'' >$ завжди є більшим від очікуваного рівня доходу $\bar{x}_p$ у цій лотереї. $\hat{x}_p > \bar{x}_p$.

Враховуючи, що функція корисності доходу f є зростаючою, наведені означення основних типів індивідуального ставлення до ризику можна сформулювати у такий спосіб.

ОПР є *нейтральною* до ризику тоді і тільки тоді, коли для двох довільних рівнів доходу x' і x'' та для довільного числа λ $(0 < \lambda < 1)$ корисність детермінованого еквіваленту лотереї $< x', \lambda, x'' >$, яка дорівнює $(1-\lambda) f(x') + \lambda f(x'')$, збігається з корисністю $f((1-\lambda)x' + \lambda x'')$ очікуваного доходу цієї лотереї, тобто коли для функції корисності f завжди справджується рівність: $(1-\lambda) f(x') + \lambda f(x'') = f((1-\lambda)x' + \lambda x'')$.

ОПР є *несхильною* до ризику тоді і тільки тоді, коли для двох довільних рівнів доходу x' і x'' та для довільного числа λ $(0 < \lambda < 1)$ завжди справджується нерівність: $(1-\lambda) f(x') + \lambda f(x'') < f((1-\lambda)x' + \lambda x'')$.

І, нарешті, ОПР є *схильною* до ризику тоді і тільки тоді, коли для двох довільних рівнів доходу x' і x'' та для довільного числа λ $(0 < \lambda < 1)$ завжди справджується нерівність: $(1-\lambda) f(x') + \lambda f(x'') > f((1-\lambda)x' + \lambda x'')$.

Таким чином, за нейтрального ставлення ОПР до ризику її функція f корисності $u = f(x)$ доходу x є лінійною: $u = Ax + B$, за несхильного – вгнутою, за схильного – опуклою.

У випадках, коли ставлення ОПР до ризику відрізняється від нейтрального, слушно користуватися експоненційними залежностями:

$$u = Ae^{cx} + B \ (c \neq 0).$$

Отже, коли дохід x змінюється в межах від a до b грошових одиниць $(a < b)$, нормована на відрізку $[a, b]$ функція корисності доходу матиме наступний аналітичний вигляд:

$$u = f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a}, \quad \text{за нейтрального ставлення ОПР до ризику}; \\ \dfrac{e^{cx} - e^{ca}}{e^{cb} - e^{ca}}, c \neq 0, \quad \text{за відмінного від нейтрального} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{ставлення ОПР до ризику}. \end{cases}$$

Знак параметру c в нормованій експоненційній залежності відповідає типу індивідуальних переважань ОПР:

$$\begin{cases} c < 0, \quad \text{якщо ОПР несхильна до ризику}; \\ c > 0, \quad \text{якщо ОПР схильна до ризику}. \end{cases}$$

Типові графіки нормованих функцій корисності доходу на множині можливих значень доходу від 100 до 1000 грошових одиниць, які відповідають різним типам переважань ОПР, наведені на рис. 3.

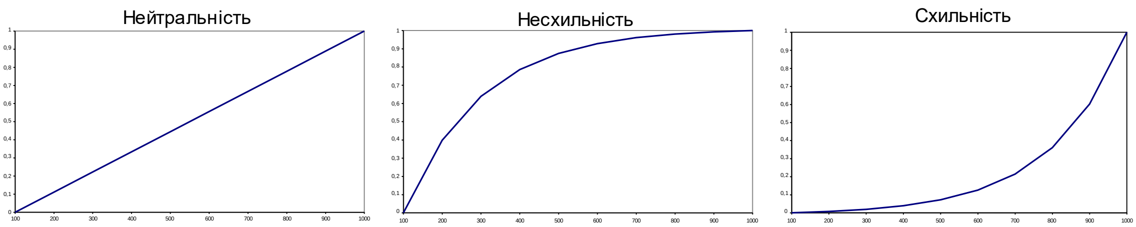

Рис. 3. Функція корисності доходу за нейтрального, несхильного або схильного ставлення ОПР до ризику.

Ідентифікація індивідуальної функції корисності доходу. Щоб визначити тип ставлення ОПР до ризику та кількісно оцінити значення параметру c у випадках, коли ставлення до ризику відрізняється від нейтрального, потрібно отримати відповідну інформацію про переважання ОПР. Найпростіше опитування полягає у такому. Запитаємо, чому дорівнює, на думку ОПР, детермінований еквівалент $\hat{x}_{0.5}$ лотереї $L = < a; b >$ з двома однаково імовірними рівнями доходу: або a, або b (з ймовірностями по ½).

Можливі варіанти відповіді ОПР характеризують її ставлення до ризику:

$$\begin{cases} \hat{x}_{0.5} \approx \dfrac{a+b}{2}, & \textit{якщо ОПР ставиться до ризику нейтрально}; \\ a < \hat{x}_{0.5} < \dfrac{a+b}{2}, & \textit{якщо ОПР несхильна до ризику}; \\ \dfrac{a+b}{2} < \hat{x}_{0.5}{}^{0.5} < b, & \textit{якщо ОПР є схильною до ризику}. \end{cases}$$

Корисність $f(\hat{x}_{0.5})$ детермінованого еквіваленту $\hat{x}_{0.5}$ лотереї $L = < a; b >$, можливі наслідки a або b якої є однаково імовірними, дорівнює $\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$. Тому, якщо ставлення ОПР до ризику відрізняється від нейтрального, тобто коли $\hat{x}_{0.5} \neq \dfrac{a+b}{2}$, для оцінювання параметру c експоненційної функції корисності $f(x) = Ae^{cx} + B$ ($c \neq 0$) маємо рівняння:

$$e^{c\hat{x}_{0.5}} = \frac{e^{cb} + e^{ca}}{2},$$

з якого випливає, що:

$$2e^{c\hat{x}_{0.5}} = e^{ca} + e^{cb}.$$

Уведемо замість невідомої величини c нову невідому величину t:

$$e^{c\frac{b-a}{2}} = t,$$

тобто виконаємо заміну змінної:

$$c = \frac{2\ln t}{b-a}.$$

Крім цього, подамо $\hat{x}_{0.5}$ у вигляді:

$$\hat{x}_{0.5} = \frac{a+b}{2} \mp q\frac{b-a}{2},$$

де $0 < q < 1$ (чим більшим є значення q, тим сильніше ставлення ОПР до ризику відрізняється від нейтрального), знак «–» відповідає несхильності до ризику (коли $a < \hat{x}_{0.5} < \dfrac{a+b}{2}$), а знак «+» – схильності до ризику (коли $\dfrac{a+b}{2} < \hat{x}_{0.5} < b$).

Тоді щодо нової змінної t рівняння набере вигляду:

$$2t^{\mp q} = t + \frac{1}{t}.$$

Для знаходження нетривіальних (що відрізняються від 1) коренів t цього рівняння, які відповідають різним можливим значенням q, пропонуємо скористатися таблицею 5, у якій наведено значення коренів відповідних рівнянь, обчислені з точністю для трьох знаків після коми, що є цілком достатнім для практичного використання.

Таблиця 5

Нетривіальний корінь t рівняння $t + \frac{1}{t} = 2t^q$,

залежно від значення параметра q $(0 < q < 1)$

q	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
t	1,223	1,508	1,895	2,461	3,383	5,158	9,733	31,843	1023,990

Приклад 3. Якщо схильна до ризику особа детермінованим еквівалентом $\hat{x}_{0.5}$ лотереї $L = <100; 1000>$ вважає дохід у розмірі 685 грошових одиниць, тоді:

$$q = \frac{2\hat{x}_{0.5} - (a+b)}{b-a} = \frac{2*685 - (100+1000)}{1000-100} = 0.3.$$

З таблиці 5 знаходимо, що $t = 1.895$. Тому обчислення параметру c здійснюватиметься за формулою:

$$c = \frac{2\ln t}{b-a} = \frac{2*\ln(1.895)}{1000-100} = 0.00142.$$

Коли ОПР несхильна до ризику та вважає, що детермінований еквівалент $\hat{x}_{0.5}$ лотереї $L = <100; 1000>$ дорівнює 325 грошових одиниць, тоді:

$$q = \frac{(a+b) - 2\hat{x}_{0.5}}{b-a} = \frac{(100+1000) - 2*325}{1000-100} = 0.5,$$

$$t = 3.383,$$

тобто остаточно, з використанням знаку «–» для несхильної до ризику ОПР:

$$c = -\frac{2\ln t}{b-a} = -\frac{2*\ln(3.383)}{1000-100} = -0.00271.$$

Графіки відповідних нормованих на відрізку $[a, b]$ функцій корисності доходу подано на рис. 4. Бачимо, що при використанні нормованих функцій корисність детермінованого еквіваленту $\hat{x}_{0.5}$ простої лотереї з однаково імовірними найгіршим та найкращим наслідками в точності дорівнює 0.5.

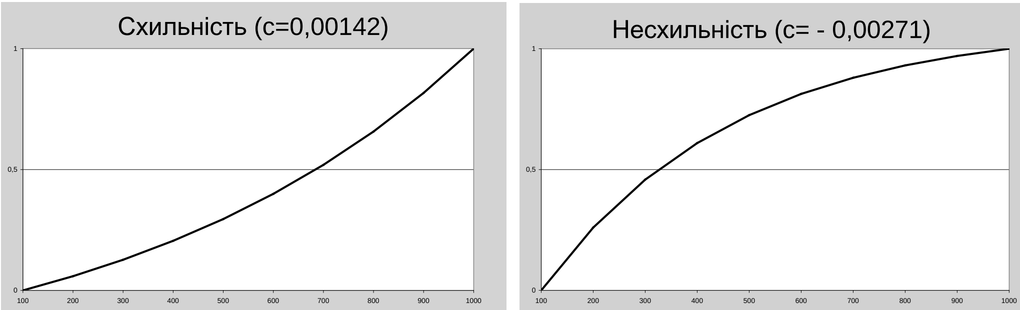

Рис. 4. Функції корисності доходу двох ОПР з різним ставленням до ризику, знайдені за значеннями детермінованих еквівалентів лотереї $L = <100; 1000>$ (в першому випадку $\hat{x}_{0.5} = 685$, в другому – $\hat{x}_{0.5} = 325$).

Зауважимо, що чим більше детермінований еквівалент $\hat{x}_{0.5}$ відрізняється від середнього значення доходу $\frac{a+b}{2}$ в простій лотереї $L = < a; b >$, тим більшим за абсолютною величиною буде значення параметру c і тим сильніше графік функції корисності відрізнятиметься від лінійної залежності (рисунки 5, 6).

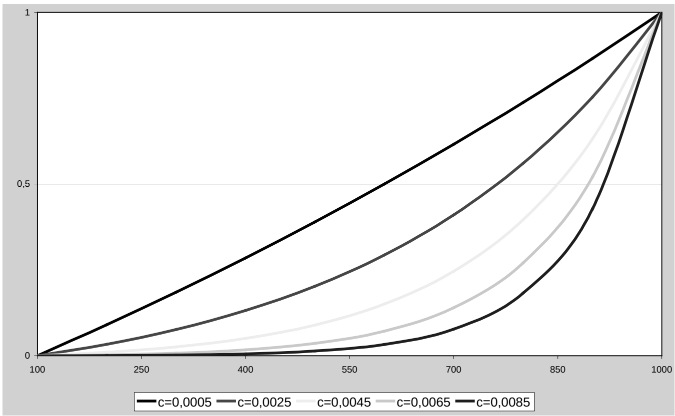

Рис. 5. Графіки експоненційних функцій корисності доходу *схильної* до ризику ОПР при різних значеннях параметру c.

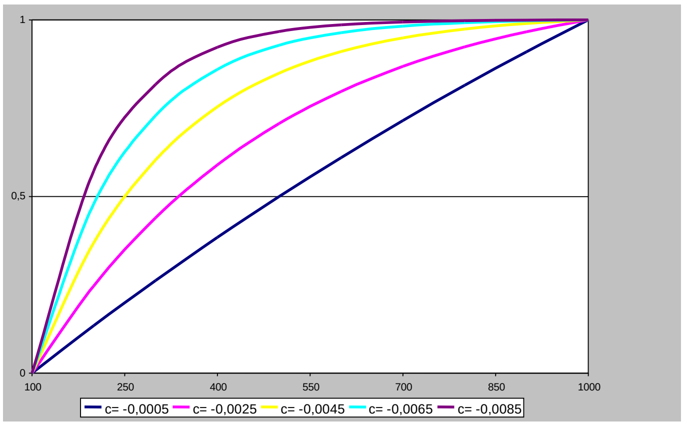

Рис. 6. Графіки експоненційних функцій корисності доходу*несхильної* до ризику ОПР при різних значеннях параметру c.

Ще один спосіб визначення параметру c експоненційної функції корисності $u = Ae^{cx} + B$ полягає у такому. Якщо ОПР може визначити імовірність p, за якої детермінований еквівалент $\hat{x}_p$ лотереї $L(a, p, b)$ дорівнюватиме $\frac{a+b}{2}$, тоді при $p \neq \frac{1}{2}$ для експоненційної функції корисності $u = Ae^{cx} + B, \quad a \le x \le b$, справджуватиметься: $c = \dfrac{2\ln\frac{1-p}{p}}{b-a}$, тобто шукану функцію корисності буде повністю ідентификовано.

Обчислення суб'єктивної оцінки випадкового доходу – його детермінованого еквіваленту. Ідентифікація функції корисності дозволяє в подальшому обчислювати суб'єктивну оцінку доходу у випадку, якщо він розглядається як випадкова величина.

Детермінований еквівалент дискретного випадкового доходу. Спочатку опрацюємо випадок, коли дохід є дискретною випадковою величиною, яка має певний закон розподілу ймовірностей (рис. 7).

Можливий рівень доходу	x_1	$\dots$	x_i	$\dots$	x_m
Ймовірність	p_1		p_i		p_m

Рис. 7. Загальний вигляд опису закону розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини рівня доходу.

Детермінований еквівалент $\hat{x}$ цього випадкового доходу визначається рівнянням:

$$f(\hat{x}) = \sum_{i=1}^{m} f(x_i) p_i ,$$

де f – функція корисності доходу, яка відповідає індивідуальним переважанням ОПР.

За *нейтрального* ставлення ОПР до ризику її функція корисності є лінійною, тому

$$\frac{\hat{x}-a}{b-a} = \sum_{i=1}^{m} \frac{x_i - a}{b-a} p_i ,$$

звідки:

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^{m} x_i p_i$$

– детермінований еквівалент випадкового доходу за нейтрального ставлення ОПР до ризику збігається з математичним сподіванням рівня цього доходу.

Якщо ставлення ОПР до ризику є *відмінним від нейтрального*, для детермінованого еквіваленту випадкового дискретного доходу матимемо рівняння:

$$\frac{e^{c\hat{x}} - e^{ca}}{e^{cb} - e^{ca}} = \sum_{i=1}^{m} \frac{e^{cx_i} - e^{ca}}{e^{cb} - e^{ca}} p_i ,$$

тобто:

$$e^{c\hat{x}} = \sum_{i=1}^{m} e^{cx_i} p_i .$$

Остаточно маємо:

$$\hat{x} = \frac{1}{c} \ln\left(\sum_{i=1}^{m} e^{cx_i} p_i\right),$$

де параметр c відповідає індивідуальним переважанням ОПР.

Приклад 4. Розглянемо проміжок значень доходу від 100 до 1000 грошових одиниць та вважатимемо, що випадковий дохід має закон розподілу ймовірностей саме такий, що наведено у таблиці 6.

Таблиця 6

Приклад закону розподілу ймовірностей

дискретної випадкової величини рівня доходу

Можливий рівень доходу	200	350	500	650	800
Ймовірність	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Для *нейтральної* щодо ризику ОПР детермінований еквівалент цього випадкового доходу дорівнюватиме:

$$\hat{x} = 200 \cdot 0.1 + 350 \cdot 0.2 + 500 \cdot 0.3 + 650 \cdot 0.3 + 800 \cdot 0.1 = 515.$$

Для *схильної* до ризику ОПР (скажімо, при $c = 0.00142$) або для *несхильної* до ризику особи (припустимо, $c = -0.00271$) процес обчислення детермінованих еквівалентів показано у таблиці 7.

Таблиця 7

Приклади обчислення детермінованого еквіваленту випадкового дискретного доходу у випадках, коли ставлення ОПР до ризику відрізняється від нейтрального

1. Схильність до ризику ($c = 0.00142$)					
i	1	2	3	4	5
x_i	200	350	500	650	800
e^{cx_i}	1,328433	1,643783	2,033991	2,516830	3,114286
p_i	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1
$e^{cx_i} p_i$	0,132843	0,328757	0,610197	0,755049	0,311429
$\Sigma = 2{,}138275$		$\ln(\Sigma) = 0{,}759999$		$\hat{x} = 535{,}2108$	

2. Несхильність до ризику ($c = -0.00271$)					
i	1	2	3	4	5
x_i	200	350	500	650	800
e^{cx_i}	0,581584	0,387322	0,257947	0,171787	0,114406
p_i	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1
$e^{cx_i} p_i$	0,058158	0,077464	0,077384	0,051536	0,011441
$\Sigma = 0{,}275984$		$\ln(\Sigma) = -1{,}28741$		$\hat{x} = 475{,}0604$	

Як і слід було очікувати, у разі схильності ОПР до ризику детермінований еквівалент випадкового доходу є більшим від математичного очікування рівня цього доходу, а у разі несхильності до ризику детермінований еквівалент випадкового доходу є меншим від очікуваного рівня цього доходу.

Приклад 4 закінчено.

Можливість обчислювати детермінований еквівалент випадкового доходу дозволяє порівнювати альтернативи за умов ризику – краща альтернатива має більший детермінований еквівалент випадкового доходу, аніж гірша.

Приклад 5. Припустимо, що є 5 альтернатив, вихідна інформація про які наведена у таблиці 8. Альтернативи A, C та E мають по 5 імовірних значень рівня доходу, а альтернативи B та D – по 6 значень.

Таблиця 8

Можливі рівні доходу та відповідні імовірності

за кожною з альтернатив

Альтернатива	Рівні доходу та імовірності						
A	Дохід	200	350	500	650	800	
	Імовірність	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1	
B	Дохід	100	300	500	700	800	900
	Імовірність	0,1	0,3	0,2	0,2	0,1	0,1
C	Дохід	100	400	600	800	1000	
	Імовірність	0,15	0,3	0,4	0,1	0,05	
D	Дохід	150	400	600	750	800	1000
	Імовірність	0,2	0,3	0,2	0,1	0,1	0,1
E	Дохід	350	450	550	650	750	
	Імовірність	0,3	0,1	0,3	0,2	0,1	

Помічаємо, що мінімально можливий рівень доходу складає 100 грошових одиниць (відповідає альтернативам B або C), а максимально можливий рівень доходу дорівнює 1000 грошових одиниць (може досягатися при виборі альтернатив C або D). Тому за проміжок можливих значень рівня доходу оберемо інтервал від 100 до 1000 грошових одиниць. Саме на цьому інтервалі будуватимемо функцію корисності доходу, що відбиватиме переважання ОПР.

Припустимо, що детермінованим еквівалентом $\hat{x}_{0.5}$ лотереї $L = <100; 1000>$ з двома однаково ймовірними рівнями доходу – або 100, або 1000 грошових одиниць – ОПР–1 вважає дохід у розмірі 550 грошових одиниць, тобто ОПР–1 є нейтральною до ризику. Припустимо також, що ОПР–2 детермінованим еквівалентом цієї найпростішої лотереї вважає дохід у розмірі 685 грошових одиниць (тобто що вона схильна до ризику), а ОПР–3 визначила детермінований еквівалент цієї ж лотереї у розмірі 325 грошових одиниць (це свідчить про несхильність до ризику ОПР–3).

Інформація про значення детермінованих еквівалентів найпростішої лотереї дозволяє знайти індивідуальні функції корисності (таблиця 9), графіки яких було наведено на рис. 3 (перший графік) та рис. 4.

Таблиця 9

Індивідуальні функції корисності доходу

ОПР–1	$u = \dfrac{x-100}{900}$, $100 \le x \le 1000$	
ОПР–2	$u = \dfrac{e^{cx} - e^{100c}}{e^{1000c} - e^{100c}}$, $100 \le x \le 1000$	$c = 0.00142$
ОПР–3	$u = \dfrac{e^{cx} - e^{100c}}{e^{1000c} - e^{100c}}$, $100 \le x \le 1000$	$c = -0.00271$

Користуючись знайденими функціями корисності, обчислимо детерміновані еквіваленти випадкових доходів за кожною з альтернатив (таблиця 10). (Процес обчислень для альтернативи A було докладно показано вище – дивись таблиці 6–7).

Таблиця 10

Детерміновані еквіваленти випадкових доходів альтернатив, що відповідають переважанням кожної ОПР

Альтернатива	ОПР–1	ОПР–2	ОПР–3
A	515	535,2108	475,0604
B	510	552,7409	430,8901
C	505	541,7830	432,9837
D	525	574,5083	437,9226
E	520	532,8569	495,9834

Значення детермінованих еквівалентів випадкових доходів усіх альтернатив дозволяють зробити висновок про упорядкування альтернатив за пере важністю кожною з ОПР:

– ОПР–1: $D \succ E \succ A \succ B \succ C$;

– ОПР–2: $D \succ B \succ C \succ A \succ E$;

– ОПР–3: $E \succ A \succ D \succ C \succ B$.

Таким чином, за умов ризику індивідуальні переважання ОПР істотно впливають як на упорядкування альтернатив, так і на кінцевий вибір найкращої альтернативи.

Приклад 5 закінчено.

Детермінований еквівалент неперервного випадкового доходу. Тепер звернемося до ситуації, коли дохід розглядається як неперервна випадкова величина. Обмежимося випадком *рівномірного* закону розподілу цієї випадкової величини на проміжку від a до b ($a < b$). Це означає, що функція щільності розподілу ймовірностей $p(x)$ рівнів доходу x є сталою на цьому проміжку та має вигляд:

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{якщо} \quad a \le x \le b; \\ 0, & \text{якщо} \quad x < a \quad \text{або} \quad x > b \end{cases}$$

Нехай $u = f(x)$, $x \in [a; b]$ – функція корисності доходу, яка відповідає переважанням ОПР. Тоді детермінований еквівалент $\hat{x}$ випадкового доходу обчислюватиметься як корінь рівняння:

$$f(\hat{x}) = \int_a^b f(x) p(x) dx,$$

оскільки корисність детермінованого еквіваленту збігається з очікуваною корисністю випадкового доходу.

За нейтрального ставлення ОПР до ризику її індивідуальна функція корисності є лінійною:

$$u = Ax + B.$$

Тому для обчислення детермінованого еквіваленту випадкового доходу дістанемо рівняння:

$$A\hat{x} + B = \frac{1}{b-a} \int_a^b (Ax + B) dx,$$

з якого отримаємо:

$$\hat{x} = \frac{a+b}{2}.$$

Переважання ОПР, якщо її ставлення до ризику відрізняється від нейтрального, моделюватимемо експоненційною функцією корисності доходу:

$$u = Ae^{cx} + B.$$

Отже, очікувана корисність випадкового рівномірно розподіленого на відрізку $[a; b]$ доходу дорівнюватиме:

$$\overline{u} = \frac{1}{b-a}\int_a^b (Ae^{cx} + B)dx = A\frac{e^{cb} - e^{ca}}{c(b-a)} + B.$$

Тобто дістанемо наступне рівняння для обчислення детермінованого еквіваленту випадкового неперервного рівномірно розподіленого доходу:

$$e^{c\hat{x}} = \frac{e^{cb} - e^{ca}}{c(b-a)},$$

з якого остаточно випливає:

$$\hat{x} = \frac{1}{c}\ln\left[\frac{e^{cb} - e^{ca}}{c(b-a)}\right].$$

Приклад 6. Якщо $a = 200$, $b = 800$, детермінований еквівалент неперервного випадкового рівномірно розподіленого на проміжку $[a; b]$ доходу дорівнюватиме:

- $\hat{x} = 500$, якщо ОПР ставиться до ризику нейтрально;
- $\hat{x} = 521.1726$, якщо ОПР є схильною до ризику ($c = 0.00142$);
- $\hat{x} = 460.2098$, якщо ОПР є несхильною до ризику ($c = -0.00271$).

Приклад закінчено.

Загальні властивості детермінованого еквіваленту випадкового доходу. Як засвідчило проведене дослідження, за нейтрального ставлення ОПР до ризику детермінований еквівалент випадкового доходу завжди збігається з очікуваним рівнем цього випадкового доходу, незалежно від закону (функції щільності) розподілу ймовірностей його можливих значень. За схильного ставлення до ризику детермінований еквівалент випадкового доходу є більшим, аніж очікуваний рівень доходу, а за несхильного ставлення до ризику – меншим.

У випадку, коли ставлення ОПР до ризику відрізняється від нейтрального, детермінований еквівалент випадкового доходу визначається не лише переважаннями ОПР, а також і конкретною аналітичною формою закону (функції щільності) розподілу ймовірностей випадкового доходу.

Обчислення детермінованого еквіваленту може ґрунтуватися на експоненційному перетворенні $T_x(c)$ для щільності розподілу $p(x)$:

$$T_x(c) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{cx} p(x)dx.$$

Дійсно, коли використовуємо експоненційну функцію корисності $u = Ae^{cx} + B$ та знаємо, що випадковий дохід x має функцію щільності розподілу ймовірностей $p(x)$, для детермінованого еквіваленту $\hat{x}$ випадкового доходу має справджуватися рівняння:

$$\bar{u} \equiv Ae^{c\hat{x}} + B = \int_{-\infty}^{+\infty} (Ae^{cx} + B)p(x)dx = AT_x(c) + B,$$

звідки дістанемо, що:

$$e^{c\hat{x}} = T_x(c),$$

тобто

$$\hat{x} = \frac{1}{c}\ln T_x(c).$$

Р.Л. Кіні та Х. Райфа наводять результати експоненційного перетворення для поширених імовірнісних розподілів – бета, біноміального, Коші, показникового, гамма, геометричного, нормального, Пуассона, рівномірного тощо. Водночас практичне використання відповідних формул часто може бути досить складним. Тому доцільно мати прості інструменти наближеного оцінювання детермінованого еквіваленту випадкового доходу та знати інші методи порівняння альтернативних випадкових доходів з метою підтримки процесів прийняття фінансових рішень за умов ризику.

Детермінований еквівалент суми випадкових доходів. Для довільної випадкової величини доходу ξ її детермінований еквівалент $\hat{x}_{\xi}$, з урахуванням (1), (2), задовольняє, залежно від ставлення ОПР до ризику, рівняння:

- або $\hat{x}_{\xi} = \overline{\xi}$ – за нейтрального ставлення до ризику, оскільки відповідні переважання відтворюються лінійною функцією корисності доходу $u = Ax + B$;
- або $e^{c\hat{x}_{\xi}} = \overline{\eta}$, $(c \neq 0)$, де $\eta = e^{c\xi}$ – допоміжна випадкова величина, залежна від випадкової величини ξ, якщо ставлення ОПР до ризику відрізняється від нейтрального та її переважання відтворюються експоненційної функцією корисності доходу $u = Ae^{cx} + B$.

(У наведених рівняннях через $\overline{\xi}$ та $\overline{\eta}$ позначено математичні очікування відповідних випадкових величин)

Розглянемо тепер випадковий дохід $\xi = \xi_1 + \xi_2$, який є сумою двох випадкових доходів ξ_1 і ξ_2, очікувані значення та детерміновані еквіваленти яких, відповідно, дорівнюють $\overline{\xi_1}$ і $\overline{\xi_2}$ та $\hat{x}_{\xi_1}$ і $\hat{x}_{\xi_2}$.

За нейтрального ставлення до ризику детермінований еквівалент $\hat{x}_{\xi}$ збігатиметься з $\overline{\xi}$, а детерміновані еквіваленти $\hat{x}_{\xi_1}$ і $\hat{x}_{\xi_2}$ збігатимуться, відповідно, з $\overline{\xi_1}$ і $\overline{\xi_2}$. З використанням теореми про математичне очікування суми випадкових величин одержимо:

$$\hat{x}_{\xi} = \overline{\xi} = \overline{\xi_1} + \overline{\xi_2} = \hat{x}_{\xi_1} + \hat{x}_{\xi_2},$$

причому цей результат має місце як у випадку незалежних, так і у випадку залежних між собою випадкових величин ξ_1 і ξ_2.

Коли ставлення до ризику відрізняється від нейтрального, поряд з новими випадковими величинами $\eta_1 = e^{c\xi_1}$ і $\eta_2 = e^{c\xi_2}$, які своїми очікуваними значеннями $\overline{\eta_1}$ і $\overline{\eta_2}$ визначають детерміновані еквіваленти $\hat{x}_{\xi_1}$ і $\hat{x}_{\xi_2}$: $e^{c\hat{x}_{\xi_1}} = \overline{\eta_1}$, $e^{c\hat{x}_{\xi_2}} = \overline{\eta_2}$, розглянемо третю нову випадкову величину $\eta = e^{c(\xi_1+\xi_2)}$. Очікуване значення $\overline{\eta}$ цієї випадкової величини визначатиме детермінований еквівалент $\hat{x}_{\xi}$ рівністю: $e^{c\hat{x}_{\xi}} = \overline{\eta}$.

За означенням, $\eta = e^{c\xi_1} e^{c\xi_2} = \eta_1 \eta_2$. Врахуємо, що при $c \neq 0$ із незалежності між собою випадкових величин ξ_1 і ξ_2 випливає незалежність між собою випадкових величин η_1 і η_2. Тому для обчислення $\overline{\eta}$ зараз скористаємося теоремою про математичне очікування добутку незалежних випадкових величин: $\overline{\eta} = \overline{\eta}_1 \cdot \overline{\eta}_2$.

Остаточно маємо: $e^{c\hat{x}_{\xi}} = \overline{\eta} = \overline{\eta}_1 \cdot \overline{\eta}_2 = e^{c\hat{x}_{\xi 1}} e^{c\hat{x}_{\xi 2}} = e^{c(\hat{x}_{\xi 1} + \hat{x}_{\xi 2})}$, звідки:

$$\hat{x}_{\xi} = \hat{x}_{\xi_1} + \hat{x}_{\xi_2},$$

але зараз цей результат має місце, якщо випадкові доходи ξ_1 і ξ_2 є незалежними між собою.

Користуючись методом математичної індукції, отримані результати можна узагальнити висновком, що детермінований еквівалент суми незалежних випадкових доходів дорівнює сумі детермінованих еквівалентів окремо кожного з випадкових доходів – складових загального випадкового доходу.

Наближене обчислення детермінованого еквіваленту випадкового доходу. Практичне використання показника детермінованого еквіваленту майбутнього випадкового доходу ускладнюється або унеможливлюється через похибки, які притаманні як функції корисності (через неможливість абсолютно точного визначення індивідуальних переважань), так і імовірнісному закону (функції щільності) розподілу ймовірностей, що використовується (оскільки йдеться про розвиток відповідних економічних процесів у майбутньому). Поширена на практиці формула «Очікуване значення – Дисперсія», заснована на використанні коефіцієнта Пратта–Ерроу, має до того ж методичні вади через несумірність одиниць виміру його окремих складових. Позбутися зазначених недоліків можна з використанням формули «Очікуване значення – Стандартне відхилення», але такий підхід вимагає належного теоретичного обґрунтування.

Обгрунування формули «Очікуване значення – Стандартне відхилення». До формули наближеного обчислення детермінованого еквіваленту випадкового доходу «Очікуване значення – Стандартне відхилення» можна дійти, виходячи з наступних міркувань і припущень.

Припущення 1. Детермінований еквівалент $\hat{x}$ випадкового доходу ξ визначається індивідуальними перевažаннями ОПР – функцією φ – залежно від очікуваного рівня $\bar{x}$ цього випадкового доходу та стандартного відхилення σ випадкового доходу ξ від його очікуваного рівня: $\hat{x} = \varphi(\bar{x}, \sigma)$.

Припущення 2. Для безризикового доходу (коли $\xi \equiv \bar{x}$ та $\sigma = 0$) детермінований еквівалент $\hat{x}$ збігається з рівнем цього доходу: $\varphi(\bar{x}, 0) = \bar{x}$.

Далі припустимо, що від однієї одиниці виміру доходу ми перейшли до іншої, тобто скористалися пропорційним перетворенням розміру доходу: $x \to tx$, де $t > 0$. Тоді очікуваний рівень, стандартне відхилення та детермінований еквівалент випадкового доходу теж мають змінитися у t раз: $\bar{x} \to t\bar{x}$, $\sigma \to t\sigma$, $\hat{x} \to t\hat{x}$. Ці міркування дають підставу ввести наступне припущення.

Припущення 3. Функція φ обчислення детермінованого еквіваленту $\hat{x}$ випадкового доходу є позитивно однорідною першого порядку функцією відносно своїх аргументів $\bar{x}$ і σ: $\varphi(t\bar{x}, t\sigma) = t\varphi(\bar{x}, \sigma)$ для довільного $t > 0$.

З теореми Ейлера про однорідні функції робимо висновок, що для функції φ обчислення детермінованого еквіваленту випадкового доходу справджується рівність:

$$\varphi(\bar{x}, \sigma) = \bar{x}\frac{\partial\varphi(\bar{x}, \sigma)}{\partial\bar{x}} + \sigma\frac{\partial\varphi(\bar{x}, \sigma)}{\partial\sigma}. \qquad (3)$$

Припущення 4. Якщо всі можливі рівні випадкового доходу ξ одночасно збільшити на детерміновані δx грошових одиниць, тоді детермінований еквівалент $\hat{x}$ теж збільшиться на δx грошових одиниць.

Звернемо увагу, що при одночасній зміні всіх можливих рівнів випадкового доходу ξ на детерміновану величину δx очікуваний рівень доходу $\bar{x}$ теж зміниться на δx грошових одиниць, у той час коли стандартне відхилення σ випадкового доходу від очікуваного рівня залишиться без змін. Тому припущення 4 означає, що справджується рівність:

$$\varphi(\bar{x}+\delta x, \sigma) = \varphi(\bar{x}, \sigma) + \delta x \qquad (4)$$

і, зокрема, що:

$$\varphi(0+\delta x, \sigma) = \varphi(0, \sigma) + \delta x. \qquad (5)$$

З рівності (4) випливає, що частинна похідна функції φ за змінною $\bar{x}$ не залежить від σ та дорівнює 1. Дійсно, покладаючи $\delta x = \Delta\bar{x}$, матимемо:

$$\frac{\partial\varphi(\bar{x},\sigma)}{\partial\bar{x}} = \lim_{\Delta\bar{x}\to 0}\frac{\varphi(\bar{x}+\Delta\bar{x},\sigma)-\varphi(\bar{x},\sigma)}{\Delta\bar{x}} =$$

$$= \lim_{\Delta\bar{x}\to 0}\frac{\varphi(\bar{x},\sigma)+\Delta\bar{x}-\varphi(\bar{x},\sigma)}{\Delta\bar{x}} = \lim_{\Delta\bar{x}\to 0}\frac{\Delta\bar{x}}{\Delta\bar{x}} = 1.$$

Зауважимо, що отриманий висновок і рівність (3) повністю узгоджуються з припущенням 2. Окрім цього, з (3) і (4) випливає, що $\varphi(\bar{x},\sigma) = \bar{x} + \sigma\dfrac{\partial\varphi(\bar{x},\sigma)}{\partial\sigma}$, а також, зокрема, що: $\varphi(0,\sigma) = \sigma\dfrac{\partial\varphi(0,\sigma)}{\partial\sigma}$.

Покладемо $\varphi(0;1) = k$. Значення k визначається індивідуальними переважаннями ОПР, причому $k = 0$, якщо ОПР є нейтральною до ризику, $k < 0$, якщо вона є несхильною до ризику, $k > 0$, якщо ОПР є схильною до ризику. Тоді з умови позитивної однорідності (припущення 3), матимемо рівність: $\varphi(0,\sigma) = k\sigma$.

Дійсно, $\varphi(0,\sigma) = \varphi(0; 1\cdot\sigma) = \varphi(0;1)\cdot\sigma = k\sigma$.

Використовуючи цей результат і рівність (5) при $\delta x = \bar{x}$, остаточно одержимо:

$$\varphi(\bar{x},\sigma) = \varphi(0+\bar{x},\sigma) = \varphi(0,\sigma) + \bar{x} = \bar{x} + k\sigma.$$

Отже, детермінований еквівалент $\hat{x}$ випадкового доходу ξ наближено можна обчислити за формулою:

$$\hat{x} = \bar{x} + k\sigma, \qquad (6)$$ де

$\bar{x}$ – очікуваний рівень (математичне сподівання) майбутнього випадкового доходу ξ,

σ_x – стандартне відхилення випадкового доходу ξ від його очікуваного рівня,

k – множник, значення якого визначається індивідуальним ставленням ОПР до ризику. А саме:

- $k = 0$, якщо ОПР нейтральна щодо ризику,
- $k < 0$, якщо вона несхильна до ризику,
- $k > 0$, якщо ОПР схильна до ризику.

Пропонуємо використовувати наступні значення цього множника:

- $\pm 0{,}2..0{,}3$, якщо ставлення ОПР до ризику дещо відрізняється від нейтрального;
- $\pm 0{,}5..0{,}6$, якщо ставлення до ризику впевнено відрізняється від нейтрального;
- $\pm 0{,}9...$, якщо ставлення ОПР до ризику значно відрізняється від нейтрального.

Бачимо, що для практичного використання формули (6) з метою порівняння ризикових альтернатив потрібно, крім переважань ОПР, оцінити лише математичне сподівання та стандартне відхилення випадкових доходів за кожною з допустимих альтернатив. Тобто докладної інформації про закони (функції щільності) розподілу ймовірностей цих випадкових величин використовувати не потрібно.

У першому наближенні обчислити математичне сподівання $\bar{x}$ та стандартне відхилення σ випадкового доходу для конкретної альтернативи можна, керуючись рекомендаціями розробників системи ПЕРТ (PERT, Program Evaluation and Research Task):

$$\overline{x} = \frac{x^{\min} + 4x^{\mathrm{mod}} + x^{\max}}{6},$$

$$\sigma = \frac{x^{\max} - x^{\min}}{6},$$

де $x^{\min}$, x^{mod} та $x^{\max}$ – відповідно, мінімальний, модальний (найімовірніший) та максимальний рівні майбутнього випадкового доходу за конкретною альтернативою, оцінювати які значно легше, аніж знаходити закони (функції щільності) розподілу ймовірностей можливих значень випадкового доходу.

Приклад 7. Знайдемо найприбутковіший з чотирьох інвестиційних проектів за даними, що наведені в таблиці 11.

Таблиця 11

Оцінки рівнів випадкового чистого зведеного доходу альтернативних інвестиційних проектів, тис. грн.

Рівень	Проект			
	A	*B*	*C*	*D*
Мінімальний	100	80	60	50
Модальний	130	125	120	110
Максимальний	190	200	210	230

Спочатку обчислимо основні статистичні характеристики випадкового чистого зведеного доходу за кожним з інвестиційних проектів та зведемо результати у таблицю 12.

Таблиця 12

Статистичні характеристики випадкового чистого зведеного доходу альтернативних інвестиційних проектів, тис. грн.

Показник	Проект			
	A	*B*	*C*	*D*
Очікуваний рівень	135	130	125	120
Стандартне відхилення	15	20	25	30

Далі, для обчислення за формулою (6) детермінованих еквівалентів випадкового чистого зведеного доходу за кожним з інвестиційних проектів, потрібно визначити переважання ОПР та оцінити індивідуальне значення множника k. Оскільки ставлення ОПР до ризику можна визначити лише наближено, вважаємо за доцільне побудувати допоміжні графіки відповідних лінійних залежностей від k детермінованих еквівалентів випадкових прибутків $\hat{x}$ кожного з інвестиційних проектів на множині значень k, скажімо, від –1,5 до 1,5 (рис. 8). Від'ємні значення цього множника відповідають несхильній до ризику ОПР, нульове – нейтральній, додатні – схильній до ризику ОПР.

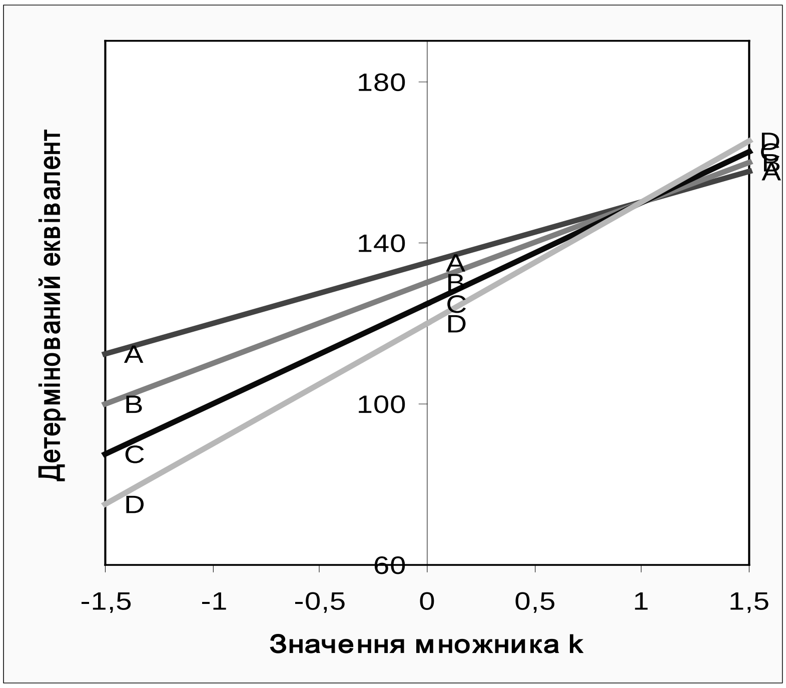

Рис. 8. Залежність детермінованих еквівалентів випадкового доходу за кожним з альтернативних інвестиційних проектів від індивідуального ставлення ОПР до ризику (відбивається значенням множника k).

Помічаємо (рис. 8), що переважна більшість ОПР найприбутковішим вважатиме інвестиційний проект A, оскільки найчастіше особи виявляють несхильність або нейтральність до ризику (при $k<1$ лінія детермінованого еквіваленту випадкового доходу за проектом A розташована вище за інші). Водночас ОПР з надзвичайно високою схильністю до ризику за найприбутковіший визнає проект D, який у порівнянні з проектом A має гірші показники модального та очікуваного рівнів випадкового чистого зведеного доходу, але характеризується вдвічі більшим значенням показника стандартного відхилення цього випадкового доходу. Проекти B або C, скоріше за все, найприбутковішими не будуть визнані за будь–якого ставлення ОПР до ризику.

Приклад 7 закінчено.

Обгрунування формули «Очікуване значення – Дисперсія». Іншу, більш поширену, формулу наближеного обчислення детермінованого еквіваленту випадкового доходу – «Очікуване значення – Дисперсія» – можна отримати у такий спосіб.

Розглянемо для функції корисності f її розвинення за формулою Тейлора із залишковим членом у формі Пеано у точці $\bar{x}$:

$$u = f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x-\bar{x}) + \frac{1}{2} f''(\bar{x})(x-\bar{x})^2 + o(x-\bar{x})^2,$$

де залишковий член $o(x-\bar{x})^2$ при $x \to \bar{x}$ є нескінченно малою порядку вище другого: $\lim\limits_{x\to\bar{x}} \frac{o(x-\bar{x})^2}{(x-\bar{x})^2} = 0$.

Якщо вихідну функцію корисності f замінити її квадратичною апроксимацією f_q:

$$u = f(x) \approx f_q(x) = f(\bar{x}) + f'(\vec{x})(x-\bar{x}) + \frac{1}{2} f''(\bar{x})(x-\bar{x})^2,$$

для очікуваної корисності $\bar{u}$ випадкового доходу ξ одержимо наступний апроксимуючий вираз:

$$\bar{u} \approx \int_a^b [\, f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x-\bar{x}) + \frac{1}{2} f''(\bar{x})(x-\bar{x})^2\,] p(x)dx =$$

$$= f(\bar{x}) + f'(\bar{x})\int_a^b xp(x)dx - f'(\bar{x})\bar{x} + \frac{1}{2} f''(\bar{x})\int_a^b (x-\bar{x})^2 p(x)dx =$$

$$= f(\bar{x}) + \frac{1}{2} f''(\bar{x})\sigma^2 .$$

де $\bar{x} = \int_a^b xp(x)dx$ – очікуване значення, а $\sigma^2 = \int_a^b (x - \bar{x})^2 p(x)dx$ – дисперсія неперервного випадкового доходу ξ, що набирає значень з відрізку $[a;b]$ із щільністю розподілу ймовірностей $p(x)$.

Нехай $\hat{x}$ – детермінований еквівалент, корисність якого збігається з очікуваною корисністю випадкового доходу:

$$f(\hat{x}) = \bar{u}.$$

Наближено значення $f(\hat{x})$ оцінюємо за формулою:

$$f(\hat{x}) \approx f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(\hat{x} - \bar{x}).$$

Отже, із системи рівнянь

$$\left.\begin{aligned} f(\hat{x}) &\approx f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(\hat{x} - \bar{x}), \\ f(\hat{x}) &\approx f(\bar{x}) + \frac{1}{2} f''(\bar{x})\sigma^2 \end{aligned}\right\}$$

остаточно одержимо:

$$\hat{x} \approx \bar{x} - \frac{1}{2} s\sigma^2, \tag{7}$$

де $s = -\dfrac{f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})}$ – коефіцієнт несхильності–схильності інвестора до ризику в точці очікуваного рівня $\bar{x}$ майбутнього випадкового доходу; цей множник s має також назву коефіцієнта Пратта–Ерроу.

Зауважимо, що формула (7) замість наближеної стає точною, якщо закон розподілу ймовірностей випадкового доходу нормальний та переважання ОПР відтворюються експоненційною функцією корисності доходу $u = Ae^{cx} + B$.

Повернення до формули «Очікуване значення – Стандартне відхилення». Продовжимо дослідження, виходячи з формули (7). Якщо в околі очікуваного доходу $\bar{x}$ коефіцієнт s несхильності–схильності до ризику вважати сталим, систему переважань ОПР в цьому околі можна відтворити або лінійною, або експоненційною функцією корисності доходу:

$$u = f(x) = \begin{cases} Ax + B, & \text{якщо} \quad s = 0, \\ Ae^{-sx} + B, & \text{якщо} \quad s \neq 0, \end{cases}$$

де A і B – деякі сталі числа, причому $A \neq 0$. Випадок $s = 0$ означає нейтральність ОПР щодо ризику. Випадок $s \neq 0$ охоплює ситуації, коли ставлення ОПР до ризику відрізняється від нейтрального; а саме: $s > 0$ відповідає несхильності, а $s < 0$ – схильності до ризику.

Щоб оцінити значення параметру s, оберемо $\Delta x > 0$ та розглянемо допоміжну лотерею $< \bar{x} - \Delta x, \bar{x} + \Delta x >$ із двома однаково імовірними наслідками: ($\bar{x} - \Delta x$) або ($\bar{x} + \Delta x$), кожний з яких може статися у цій лотереї із імовірністю ½. Позначимо через $\tilde{x}$ детермінований еквівалент такої лотереї, який визначимо згідно переважань ОПР.

Якщо $\tilde{x} \approx \bar{x}$, робимо висновок про нейтральне ставлення ОПР до ризику; отже $s = 0$.

У разі, якщо $\tilde{x} \neq \bar{x}$, для параметра s несхильності–схильності ОПР до ризику матимемо рівняння:

$$\frac{1}{2}(Ae^{-s(\bar{x}-\Delta x)} + B) + \frac{1}{2}(Ae^{-s(\bar{x}+\Delta x)} + B) = Ae^{-s\tilde{x}} + B,$$

або, остаточно:

$$e^{s\Delta x} + e^{-s\Delta x} = 2e^{-s(\tilde{x}-\bar{x})}. \qquad (8)$$

Для опрацювання цього рівняння розглянемо спочатку випадок, коли ОПР є несхильною до ризику. У такому разі $s > 0$ та $\bar{x} - \Delta x < \tilde{x} < \bar{x}$. Розрізнятимемо три рівні несхильності: помірний, коли $\bar{x} - \tilde{x} = 0.2\Delta x$; середній, коли $\bar{x} - \tilde{x} = 0.5\Delta x$, та високий, коли $\bar{x} - \tilde{x} = 0.8\Delta x$. Тоді рівняння (8) для обчислення параметру s зводиться до рівняння:

$$t + \frac{1}{t} = 2t^{q}, \qquad (9)$$

де $t = e^{s\Delta x}$ – нова невідома змінна; q – показник рівня несхильності, який набуває одного з трьох значень: 0,2, 0,5 або 0,8.

Для випадку, коли інвестор виявляє схильність до ризику: $s < 0$, $\bar{x} < \tilde{x} < \bar{x} + \Delta x$, також розглянемо три рівні: помірної схильності, коли

$\tilde{x} - \bar{x} = 0{,}2\Delta x$; середньої схильності, коли $\tilde{x} - \bar{x} = 0{,}5\Delta x$; високої схильності, коли $\tilde{x} - \bar{x} = 0{,}8\Delta x$. Зараз залучимо нову змінну $t = e^{-s\Delta x}$. Тоді для визначення параметра s з рівняння (8) знову отримаємо рівняння (9), у якому q тепер характеризуватиме рівень схильності інвестора до ризику (із відповідними значеннями 0,2, 0,5 або 0,8).

Нехай маємо нетривіальний (що відрізняється від 1) розв'язок t_0 рівняння (9), який визначається рівнем відхилення q системи переважань інвестора від нейтрального ставлення до ризику. Тоді параметр s несхильності–схильності інвестора до ризику обчислюватиметься за формулою:

$$s = \pm \frac{1}{\Delta x} \ln t_0 ,$$

у якій знак «+» відповідає несхильному, а знак «–» – схильному ставленню до ризику.

Якщо показник варіації доходу Δx в допоміжній лотереї покласти таким, що дорівнює стандартному відхиленню випадкового доходу σ:

$$\Delta x = \sigma ,$$

формула (7) наближеного обчислення детермінованого еквіваленту $\hat{x}$ випадкового доходу набере вигляду:

$$\hat{x} = \bar{x} \mp \frac{1}{2} \sigma \ln t_0 .$$

Для практичного використання наведеної формули подамо її у вигляді:

$$\hat{x} = \bar{x} \mp k\sigma(x),$$

де знак «–» відповідатиме несхильному, знак «+» – схильному ставленню до ризику, а множник $k = \frac{1}{2} \ln t_0(q)$ визначатиметься рівнем відхилення q системи переважань інвестора від нейтрального типу ставлення до ризику (таблиця 13).

Таблиця 13

Значення множника $k = \frac{1}{2}\ln t_0(q)$ залежно від рівня q

несхильності або схильності інвестора до ризику

Показник	Рівень несхильності або схильності до ризику:								
	помірний			середній			високий		
q	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
k	0,10	0,21	0,32	0,45	0,61	0,82	1,14	1,73	3,47

Таким чином, ми знову повернулися до формули (6) наближеного обчислення детермінованого еквіваленту випадкового доходу «Очікуване значення – Стандартне відхилення», але додатково отримали обґрунтування щодо можливих значення множника k залежно від рівня відхилення системи переважань ОПР від нейтрального ставлення до ризику:

- 0,2..0,3 – за помірного відхилення,
- 0,5..0,6 – за середнього відхилення,
- 0,9 і вище – у разі значного відхилення.

Насамкінець щодо формули (6) «Очікуване значення – Стандартне відхилення» зазначимо, що коли критеріальний показник порівняння альтернатив має оптимізаційне спрямування не до максимуму (коли йдеться про дохід чи прибуток), а до мінімуму (коли йдеться, скажімо, про витрати), значення множника k, що використовується у цій формулі для обчислення детермінованого еквіваленту, потрібно брати додатним у разі несхильності ОПР до ризику, а у разі схильності до ризику – від'ємним. Причому, незалежно від оптимізаційного спрямування критеріального показника, за абсолютним значенням множник k є нульовим за нейтрального ставлення ОПР до ризику, але тим більше відрізняється від нуля, чим більше ставлення ОПР до ризику відрізняється від нейтрального.

Запитання для самоконтролю:

1. Порівняйте основні економічні показники (NPV, PP, IRR, PI) наступних двох альтернативних фінансових проектів (млн. грн.), якщо квартальна нормативна ставка дисконту $r = 0.4\%$:

Проект, показник	Квартал життєвого циклу									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Проект А, витрати	6	6	5	6	4	5	4	7	4	4
Проект А, доходи	3	3	4	4	5	6	7	7	8	10
Проект Б, витрати	7	5	5	5	5	5	5	5	5	4
Проект Б, доходи	3	2	4	4	5	6	7	8	9	10

2. Чому значення ставки дисконту завжди є обмеженим знизу, але теоретично не може бути обмеженим зверху? Наведіть приклади ситуацій, коли ставку дисконту слід обирати від'ємною.

3. Відомо, що чистий зведений дохід фінансового проекту може з імовірністю 0.21 дорівнювати 12 млн. грн., з імовірністю 0.45 дорівнювати 10 млн. грн. та з імовірністю 0.34 дорівнювати 15 млн. грн. Обчислити показники очікуваного рівня та стандартного відхилення цього випадкового NPV.

4. Прибуток за фінансовим проектом вважається бета–розподіленою випадковою величиною на множині значень від 400 до 1000 грошових одиниць з параметрами функції щільності ймовірностей $\alpha = 0.8$, $\gamma = 1.7$. Обчислити показники очікуваного рівня та стандартного відхилення цього випадкового прибутку.

Вказівка. Нагадаємо, що випадковий дохід ξ є бета–розподіленим на відрізку $[a, b]$, якщо функція щільності розподілу його ймовірностей $p(x)$ має вигляд:

$$p(x) = \begin{cases} \beta (x-a)^{\alpha} (b-x)^{\gamma}, & \text{якщо} \quad a \le x \le b\,; \\ 0\,, & \text{якщо} \quad x < a \quad \text{або} \quad x > b\,, \end{cases}$$

де $\alpha > -1$, $\gamma > -1$, $\beta = \dfrac{1}{\int_a^b (x-a)^{\alpha} (b-x)^{\gamma}\, dx}$.

Очікуване значення $\bar{x}$ і стандартне відхилення σ бета–розподіленої випадкової величини визначаються формулами:

$$\bar{x} = \frac{a + b + \gamma a + \alpha b}{\alpha + \gamma + 2}, \qquad \sigma = \frac{(b-a)\sqrt{(\alpha+1)(\gamma+1)}}{(\alpha+\gamma+2)\sqrt{\alpha+\gamma+3}}.$$

Модальне (найімовірніше) значення x^{mod} бета–розподіленої випадкової величини дорівнює:

$$x^{\mathrm{mod}} = \frac{\gamma a + \alpha b}{\alpha + \gamma},$$

тобто можемо очікуване значення цієї випадкової величини подати залежністю від модального:

$$\bar{x} = \frac{a + b + (\alpha + \gamma)x^{\mathrm{mod}}}{\alpha + \gamma + 2}.$$

Зокрема, в методі ПЕРТ покладають $\alpha = 2 \pm \sqrt{2}$, $\gamma = 2 \mp \sqrt{2}$, звідки $\bar{x} = \frac{a + 4x^{\mathrm{mod}} + b}{6}$, $\sigma = \frac{b - a}{6}$.

5. Є три фінансових менеджери, індивідуальні функції корисності яких щодо доходу x, що може змінюватися в межах від 1300 до 1500 грошових одиниць, наступні:

1) $u = \dfrac{x - 1300}{200}$,

2) $u = \dfrac{e^{cx} - e^{1300c}}{e^{1500c} - e^{1300c}}$, $c = -0.002$;

3) $u = \dfrac{e^{cx} - e^{1300c}}{e^{1500c} - e^{1300c}}$, $c = 0.004$.

Побудувати графіки зазначених функцій корисності та зазначити тип ставлення до ризику кожного фінансового менеджера.

6. Відомо, що випадковий дохід за фінансовим проектом має рівномірний закон розподілу імовірностей на множині значень від 1300 до 1500 грошових одиниць. Обчислити детерміновані еквіваленти цього випадкового доходу для кожного з трьох фінансових менеджерів, індивідуальні функції корисності доходу – у попередньому завданні.

7. Прибуток за фінансовим проектом A вважається бета–розподіленою випадковою величиною на множині значень від 400 до 1000 грошових одиниць з параметрами функції щільності ймовірностей $\alpha = 0.8$, $\gamma = 1.7$; за проектом B – бета–розподіленим на відрізку від 300 до 1100 грошових одиниць з параметрами функції щільності ймовірностей $\alpha = 2.2$, $\gamma = 4.3$; за проектом C – рівномірно розподіленим на множині значень від 200 до 1200 грошових одиниць. Визначити, яким буде упорядкування цих проектів за показником детермінованого еквіваленту цього прибутку залежно від особливостей ставлення фінансового менеджера до ризику.

8. Визначити найприбутковіший з п’яти фінансових проектів за наведеними експертними даними щодо рівнів майбутнього випадкового доходу (млн. грн.), якщо фінансовий менеджер є помірно несхильним до ризику:

Рівень доходу	Проект				
	A	*B*	*C*	*D*	*E*
Мінімальний	10	12	8	7	9
Модальний	14	13	11	12	14
Максимальний	17	15	20	21	18

9. Проілюструвати ефект диверсифікації на прикладі задачі про формування найдохіднішого фінансового портфелю, який може складатися з двох активів, дохідності за якими є випадковими з коефіцієнтом кореляції $\rho = -0.82$.

10. Поясніть, чому в формулі «Очікуване значення – Стандартне відхилення» обчислення детермінованого еквіваленту правило вибору знаку множника k міняється, якщо оцінювати не випадковий прибуток, а випадкові витрати.

Список рекомендованих джерел:

1. Брейли Р. Принципы корпоративных финансов: Пер. с англ. / Брейли Р., Майерс С. – М.: ЗАО «Олимп–Бизнес», 1997. – XXXI, 1120 с.
2. Загорна Т.О. Економічна діагностика : [навч посібн.] / Т.О. Загорна. – К. : ЦУЛ, 2007. – 400 с.
3. Кини Р.Л. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения: Пер. с англ. / Кини Р.Л., Райфа Х. – М.: Радио и связь, 1981. – 560 с.
4. Кігель В.Р. Оптимізація фінансових рішень: Навчальний посібник. / Кігель В.Р. – К.: Дорадо–Друк, 2011. – 172 с.
5. Кофман А. Сетевые методы планирования: Применение системы ПЕРТ и ее разновидностей при управлении производственными и научно–исследовательскими проектами: Пер. с фр. / Кофман А., Дебазей Г. – М.: Прогресс, 1968. – 180 с.
6. Лобанов А. А. Энциклопедия финансового риск-менеджмента / А.А. Лобанов, А.В. Чугунов. – М. : Альпина Паблишер, 2003. – 786 с.
7. Моделювання економічної безпеки: держава, регіон, підприємство / В.М. Геєць, М.О. Кизим, Т.С, Клебанова, О.І. Черняк. – Х., 2006. – 240 с.
8. Нейман фон Дж. Теория игр и экономическое поведение: Пер. с англ. / Нейман фон Дж., Моргенштерн О. – М.: Наука, 1970. – 700 с.
9. Пономаренко В.С. Моделювання поведінки інвестора на фондовому ринку: [монографія] / В.С. Пономаренко, О.В. Раєвнєва, К.А. Стрижиченко. – Харків: ВД «ІНЖЕК», 2004. – 264 с.
10. Шарп У. Инвестиции: Пер. с англ. / Шарп У., Гордон Дж., Бэйли Дж.. – М: Инфра–М, 1997. – 1024 с.