«Торгівля цінними паперами»
Підручник за редакцією В.І. Грушка

Розділ XI. Оптимальне управління портфелем фінансових активів

В.Р. Кігель к.е.н., доцент

Ключові слова: портфель фінансових активів, дохідність, оптимізація, теорія Марковиця, ризик, ставлення до ризику, критерій Вальда, фундаментальний аналіз, технічний аналіз.

Ґрунтовні дослідження з проблеми оптимізації портфелю фінансових активів, враховуючи ризик щодо майбутньої дохідності фінансових інструментів, було започатковано працями Г. Марковиця. На сьогодні портфельній теорії та питанням оптимізації у сфері фінансового інвестування присвячено численну літературу. Більшість науковців враховують, що ставлення інвестора до ризику є індивідуальним. Проте часто дослідження обмежуються лише випадками, коли ставлення до ризику особи, яка приймає відповідні фінансові рішення, – ОПР – є лише або нейтральним, або несхильним. Водночас теорія прийняття рішень визначає не два, а три основних типи ставлення до ризику: нейтральність, несхильність та схильність.

Нейтральний до ризику інвестор бере до уваги лише очікуваний (у математичному сенсі) рівень майбутнього випадкового доходу. Навпаки, несхильні або схильні до ризику особи додатково враховують і можливість відхилення майбутнього випадкового доходу від його очікуваного рівня. Причому несхильні до ризику інвестори дещо більше уваги звертають на можливе зменшення випадкового доходу у порівнянні з очікуваним рівнем, а схильні до ризику – навпаки – дещо більше уваги звертають на можливе перевищення майбутнім доходом свого очікуваного рівня.

Тому опрацюємо задачу оптимального управління портфелем фінансових активів, враховуючи кожний з зазначених основних типів індивідуального ставлення ОПР до ризику. Послідовно вивчимо ситуації прийняття рішень у детермінованих умовах, умовах ризику, а також за умов невизначеності щодо майбутньої дохідності різних фінансових інструментів.

Побудова економіко–математичних моделей. Щоб побудувати економіко–математичні моделі для розв'язування задач оптимального управління портфелем фінансових активів уведемо, насамперед, необхідні позначення.

Відомі величини:

n – кількість напрямів інвестування (видів цінних паперів, якими володіє або може володіти інвестор);

j – номер окремого напряму інвестування ($j = \overline{1, n}$);

a_j – кількість цінних паперів j–го виду, наявних у інвестора в поточний момент часу;

p_j – ціна реалізації інвестором одного свого j–го цінного паперу (за умови продажу в поточний момент часу);

q_j – ціна придбання інвестором однієї додаткової одиниці j–го цінного паперу в поточний момент часу;

r – процентна ставка за кредит у випадку залучення інвестором у поточний момент часу позикових коштів;

s – ставка банківського депозитного проценту;

I – розмір вільного капіталу інвестора в поточний момент часу.

Невідомі величини:

v – розмір позикових коштів, що доцільно залучити інвестору в поточний момент часу для переформування свого фінансового портфелю;

w – залишок вільного капіталу інвестора після переформування їм свого фінансового портфеля. Передбачається, що цей залишок буде розміщений на депозитному рахунку з процентною ставкою s;

x_j – кількість цінних паперів j–го виду (із наявних в інвестора), що підлягають реалізації в поточний момент часу;

y_j – кількість цінних паперів j–го виду, що інвестору доцільно придбати в поточний момент часу;

z – загальний дохід фінансового портфеля інвестора за плановий період.

Некеровані параметри:

d_j – дохід, який забезпечуватиме у плановому періоді один цінний папір j–го виду. Наприклад, якщо цінним папером є проста акція, то за умови виплати дивідендів до кінця планового періоду дохід за нею – це сума величини дивідендів і ціни реалізації даної акції наприкінці планового періоду.

У детермінованих умовах значення некерованих параметрів у момент прийняття рішення передбачаються відомими. За умов ризику вони розглядаються як випадкові величини з відомими їх деякими основними статистичними характеристиками. Нарешті, в умовах невизначеності некеровані параметри вважаються невизначеними в межах певних діапазонів їхніх можливих значень.

Співвідношення між відомими, невідомими величинами і некерованими параметрами:

1). Умова дотримання фінансового балансу при переформуванні фінансового портфеля:

$$I + \sum_{j=1}^{n} p_j x_j + v = \sum_{j=1}^{n} q_j y_j + w$$

– наявний вільний капітал плюс капітал, виручений від продажу власних цінних паперів, плюс позиковий капітал у сумі дорівнюють витратам на придбання нових фінансових активів плюс новий залишок вільного капіталу інвестора;

2). Правило обчислення загального доходу фінансового портфеля інвестора за плановий період:

$$z = \sum_{j=1}^{n} d_j (a_j - x_j + y_j) - (1+r)v + (1+s)w$$

– загальний дохід визначається дохідністю кожного з напрямів інвестування і кількістю відповідних цінних паперів, що міститимуться в переформованому фінансовому портфелі, мінус повернення позикових коштів, з урахуванням сплати процентів за цей кредит, плюс дохід від розміщення залишку вільного капіталу на депозит;

3). Обмеження на кількість цінних паперів, що підлягають реалізації в поточний момент часу із числа наявних у інвестора:

$$0 \le x_j \le a_j, \; j = \overline{1, n};$$

4). Природні умови невід'ємності інших основних керованих змінних:

$$y_j \ge 0, \; j = \overline{1, n}; \; v \ge 0; \; w \ge 0.$$

Таким чином, усі потрібні співвідношення між відомими, невідомими величинами і некерованими параметрами задач оптимального управляння портфелем фінансових активів побудовані.

Дослідження задачі у детермінованому випадку. З урахуванням вищенаведених співвідношень між відомими, невідомими величинами і некерованими параметрами економіко–математична модель задачі оптимального управління портфелем фінансових активів у детермінованих умовах набирає такого виду:

$$\left.\begin{array}{c} z = \sum\limits_{j=1}^{n} d_j (a_j - x_j + y_j) - (1+r)v + (1+s)w \to \max, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} (-p_j x_j + q_j y_j) - v + w = I, \\ 0 \le x_j \le a_j, \quad y_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n}; \quad v, w \ge 0. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Цільова функція цієї моделі відповідає вимозі вибору такого портфелю фінансових активів, що забезпечував би інвестору в плановому періоді якнайбільший загальний дохід. Обмеження моделі випливають із співвідношень між відомими величинами, невідомими величинами і некерованими параметрами.

Дослідження детермінованої задачі проведемо за таких *припущень* про співвідношення між відомими величинами задачі оптимального управління портфелем фінансових активів:

1). Кількість цінних паперів, наявних у інвестора, і його вільний капітал у поточний момент часу – невід'ємні:

$$a_j \geq 0,\ j = \overline{1, n}; \quad I \geq 0.$$

Дана умова означає, що інвестор на поточний момент часу вже сплатив свої боргові зобов'язання за минулий період, якщо такі мали місце раніше;

2). Ринкова вартість цінних паперів невід'ємна причому для інвестора ціна продажу своїх цінних паперів нижча, аніж ціна придбання їм аналогічних цінних паперів:

$$0 \leq p_j < q_j\ , \quad j = \overline{1, n}.$$

Дане припущення виключає ситуацію, коли інвестор може необмежено продавати свої цінні папери за рахунок одночасного придбання їм у ще більшій кількості таких же фінансових інструментів, але за меншу ціну;

3). Процентні ставки невід'ємні, причому ставка за позикові кошти вища, аніж ставка у випадку розміщення інвестором вільного капіталу на депозит:

$$0 \leq s < r.$$

Дане припущення виключає ситуацію, коли є можливість брати необмежений кредит і розміщати його на депозит під більш високий процент, чим ставка за кредит.

Можна переконатися, що при виконанні зазначених припущень поточний портфель фінансових активів інвестора є оптимальним, тобто не підлягає переформуванню, якщо виконуються нерівності:

$$(1+s)p_j \leq d_j \leq (1+s)q_j\ , \quad j = \overline{1, n}.$$

Це правило стає зрозумілим після вилучення з цільової функції задачі змінної w на основі основного обмеження–рівняння:

$$w = I + \sum_{j=1}^{n} (p_j x_j - q_j y_j) + v.$$

У результаті такого вилучення залежність доходу z інвестора від інших змінних набере вигляду:

$$z = \sum_{j=1}^{n} d_j a_j + (1+s)I + \sum_{j=1}^{n} ((1+s)p_j - d_j)x_j +$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} (d_j - (1+s)q_j)y_j + (s-r)v.$$

Бачимо, що при виконанні усіх припущень збільшення значення довільної із змінних x_j, y_j, ($j = \overline{1, n}$), або v не буде призводити до збільшення доходу z інвестора, тобто нульові значення цих змінних є оптимальними.

Доходимо висновку, що необхідність у переформуванні фінансового портфеля виникає тоді, коли:

– або є напрям інвестування j', що характеризується більш високою дохідністю, аніж розміщення капіталів на депозитному рахунку:

$$j' \in \{\overline{1, n}\}: \quad \frac{d_{j'}}{q_{j'}} > (1+s);$$

– або дохідність наявних у інвестора цінних паперів виду j'' нижча, аніж дохідність від розміщення виручених у результаті реалізації цих активів коштів на депозитний рахунок:

$$j'' \in \{\overline{1, n}\}: \quad \frac{d_{j''}}{p_{j''}} < (1+s).$$

Отже, якщо мають місце зазначені випадки, інвестору варто звернутися до пошуку рішення задачі оптимального управління портфелем фінансових активів (1). Вилучивши з її цільової функції сталий доданок $\sum_{j=1}^{n} d_j a_j$, перепишемо задачу у такий спосіб:

$$\left.\begin{array}{c} z = -\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + \sum_{j=1}^{n} d_j y_j - (1+r)v + (1+s)w \to \max\,, \\ -\sum_{j=1}^{n} p_j x_j + \sum_{j=1}^{n} q_j y_j - v + w = I\,, \\ x_j \le a_j\,, \quad j = \overline{1,n}\,, \\ x_j\,, \quad y_j \ge 0\,, \quad j = \overline{1,n}\,; \quad v, w \ge 0\,. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Маємо задачу лінійного програмування, яку можна розв’язати з використанням спеціалізованих програмних засобів, зокрема, підпрограмою «Пошук рішення» табличного процесору Excel. Проте попередні висновки стають помітними в результаті застосування теорії двоїстості.

Двоїстою до задачі (2) слугує така задача лінійного програмування:

$$\left.\begin{array}{c} \gamma = I\alpha + \sum_{j=1}^{n} a_j \beta_j \to \min\,, \\ -p_j\alpha + \beta_j \ge -d_j\,, \quad j = \overline{1,n}\,; \\ q_j\alpha \ge d_j\,, \quad j = \overline{1,n}\,; \\ (1+s) \le \alpha \le (1+r)\,, \\ \beta_j \ge 0\,, \quad j = \overline{1,n}\,, \end{array}\right\} \qquad (3)$$

де α, β_j, $j = \overline{1,n}$, – основні невідомі величини цієї задачі, а I; a_j, d_j, p_j, q_j, $j = \overline{1,n}$; r і s – ті ж відомі величини, що й у вихідній задачі (2).

Розв’язок двоїстої задачі можна записати явно:

$$\alpha^* = \min\{\max\{(1+s); \frac{d_j}{q_j},\ j = \overline{1,n}\}; (1+r)\},$$

$$\beta_j^* = \max\{p_j\alpha^* - d_j; 0\},\ j = \overline{1,n}\,.$$

Щодо оптимального значення α^* спостерігаємо, передусім, два випадки, які охарактеризуємо докладніше.

Випадок 1. Припустимо, що $\alpha^* = (1+s)$. Це має місце, якщо дохідність від розміщення капіталів на депозит не нижча, аніж дохідність у результаті придбання яких–небудь цінних паперів:

$\dfrac{d_j}{q_j} \le (1+s)$ для усіх $j = \overline{1, n}$.

Зараз придбання додаткових цінних паперів є недоцільним, причому відсутня і необхідність у залученні позикових коштів:

$y_j^* = 0$, $j = \overline{1, n}$; $v^* = 0$.

Усі ті наявні у інвестора цінні папери, продаж яких із наступним розміщенням виручених коштів на депозит забезпечить дохід вище, чим володіння цими активами, підлягають реалізації:

$p_{j''}(1+s) > d_{j''} \Rightarrow x_{j''}^* = a_{j''}$,

а виручений від цієї реалізації обсяг коштів повинний бути спрямований на приріст вільного капіталу, розміщуваного на депозитному рахунку:

$$w^* = I + \sum_{j=1}^{n} p_j x_j^* .$$

Випадок 2. Цей варіант виникає, коли дохідність за якимось із напрямів інвестування перевищує дохідність від розміщення капіталу на депозит. Нехай j' – напрямок інвестування з найбільшою дохідністю, тобто, для розглянутого випадку,

$$\frac{d_{j'}}{q_{j'}} = \max_{j \in \{1,\, n\}} \frac{d_j}{q_j} > (1+s).$$

Якщо при цьому $\dfrac{d_{j'}}{q_{j'}} > (1+r)$, тоді $\alpha^* = (1+r)$. Це свідчить про необхідність залучення позикових коштів ($v^* \ge 0$), причому весь капітал, включаючи і наявний вільний, доцільно вкласти в придбання активів виду j', оскільки $w^* = 0$.

Якщо ж $\frac{d_{j'}}{q_{j'}} < (1+r)$, тоді $(1+s) < \alpha^* = \frac{d_{j'}}{q_{j'}} < (1+r)$, тобто брати кредит недоцільно ($v^* = 0$). Залишати вільний капітал також недоцільно ($w^* = 0$), а усі кошти, із необхідним переформуванням фінансового портфеля, доцільно направити на придбання цінних паперів із якнайбільшою дохідністю.

Таким чином, якщо некеровані параметри d_j, $j = \overline{1, n}$, детерміновані, оптимальний план переформовування портфеля фінансових активів визначатиметься в результаті розв'язування відповідної задачі лінійного програмування (1).

Дослідження задачі за умов ризику. Перейдемо тепер до дослідження задачі оптимального управління портфелем фінансових активів за умов ризику, коли некеровані параметри вважаються випадковими величинами з відомими принаймні їх основними статистичними характеристиками. Зараз вибір економіко–математичного інструментарію визначатиметься типом ставлення до ризику конкретного інвестора.

Якщо інвестор *нейтральний* до ризику, оптимальний план переформування його фінансового портфеля визначатиметься розв'язуванням задачі лінійного програмування:

$$\left.\begin{aligned} &\bar{z} = \sum_{j=1}^{n} \bar{d}_j (a_j - x_j + y_j) - (1+r)v + (1+s)w \to \max, \\ &\sum_{j=1}^{n} (-p_j x_j + q_j y_j) - v + w = I, \\ &0 \le x_j \le a_j, \quad y_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n}; \quad v, w \ge 0, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

де через $\bar{d}_j$ позначене очікуване значення доходу, який забезпечуватиме в плановому періоді одиниця цінного паперу j–го виду ($j = \overline{1, n}$), а через $\bar{z}$ – загальний очікуваний дохід фінансового портфеля інвестора (розраховується за правилом обчислення середнього значення суми випадкових величин).

Математично ця задача принципово не відрізняється від вже досліджуваної задачі для детермінованого випадку (1), за тим лише виключенням, що замість детермінованих значень показників дохідності різних фінансових інструментів використовуються математичні очікування відповідних випадкових величин.

Процес розв'язування задачі оптимального управління портфелем фінансових активів у випадках, коли ставлення інвестора до ризику *відрізняється від нейтрального*, дещо інший. Насамперед відзначимо, що найкращий для інвестора фінансовий портфель потрібно шукати серед ефективних планів двокритеріальної задачі:

$$\left.\begin{aligned} \bar{z} = \sum_{j=1}^{n} \bar{d}_j (a_j - x_j + y_j) - (1+r)v + (1+s)w \to \max, \\ \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j (a_i - x_i + y_i)(a_j - x_j + y_j) \to \min\,(\max), \\ \sum_{j=1}^{n} (-p_j x_j + q_j y_j) - v + w = I, \\ 0 \le x_j \le a_j, \quad y_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}; \quad v, w \ge 0, \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

яка характеризується, у порівнянні з задачею (4), наявністю додаткової цільової функції. Новий критеріальний показник – σ^2 – це дисперсія загального доходу фінансового портфеля; оптимізаційна спрямованість цього показника (до мінімуму або, напроти, до максимуму) відповідає типу ставлення до ризику конкретного інвестора (несхильності або, навпаки, схильності).

Дисперсія σ^2 випадкової величини доходу z фінансового портфеля інвестора розраховується за формулою для дисперсії лінійної функції випадкових величин. У нашій задачі для запису цієї формули були використані такі позначення: ρ_{ij} – коефіцієнт кореляції між показниками доходів за цінними паперами видів i і j; σ_i (σ_j) – стандартне відхилення випадкового доходу одиниці i–го (j–го) цінного паперу ($i,\ j = \overline{1,n}$).

Розв’язок двокритеріальної задачі (5) визначається тією з її ефективних оцінок $(\bar{z}^*, \sigma^2{}^*)$, що найбільшою мірою відповідає переважанням інвестора. Для знаходження цього розв’язку можна скористатися наступною процедурою.

Етап 1. Визначаються діапазони зміни кожної із цільових функцій на множині ефективних планів відповідної двокритеріальної задачі – інтервали $[\bar{z}_{\min}; \bar{z}_{\max}]$ і $[\sigma^2{}_{\min}; \sigma^2{}_{\max}]$. Якщо хоча б один із них перетвориться в точку (при цьому другий інтервал також буде точкою), це означає, що всі ефективні плани рівноцінні, причому довільний з них може бути вибраний за рішення.

У більш типовому випадку кожний із виявлених інтервалів буде мати ненульову довжину, у зв’язку з чим для вирішення проблеми потрібні подальші розрахунки.

Етап 2. Будуємо узагальнену адитивну цільову функцію:

$$u = \frac{\bar{z}}{\bar{z}_{\max} - \bar{z}_{\min}} \mp \frac{\sigma^2}{\sigma^2{}_{\max} - \sigma^2{}_{\min}}$$

(знак між доданками відповідає типу ставлення інвестора до ризику: «–» – несхильності, «+» – схильності) і знаходимо на множині допустимих планів такий фінансовий портфель, що відповідає максимуму цієї функції. Цей план ефективний; його показники очікуваного доходу і дисперсії доходу повідомляються інвестору.

Етап 3. Якщо інвестор не погоджується з досягнутими рівнями очікуваного доходу і дисперсії доходу, він повинен вказати такі рівні цих критеріальних показників, які він вважає задовільними.

Етап 4. Встановлюється реальність указаних інвестором задовільних рівнів критеріальних показників. При необхідності здійснюється корекція рівнів – або у бік поліпшення, якщо рівні реальні, або у бік послаблення – щоб зробити реальними.

Етап 5. Визначається такий ефективний фінансовий портфель, критеріальні показники якого відповідають реальним (скоригованим) задовільним рівням. Інформація про нього передається інвестору.

Етап 6. Якщо інвестор не погоджується з черговою рекомендацією, він повинний внести корекцію в указані їм раніше рівні задовільних значень критеріальних показників, після чого варто повернутися до етапу 4.

Деяка складність у реалізації запропонованої методики полягає у тому, що задачі, які розв'язуються на етапах 1, 2, 4 і 5, є нелінійними. Ще однією особливістю методики є можливість виникнення необхідності кількаразової реалізації етапів 4 – 6, проте відомі прийоми, котрі забезпечують збіжність цього діалогу за скінчене, причому достатньо невелике число кроків.

Інший підхід до розв'язування задачі оптимального управління портфелем фінансових активів за умов ризику може полягати у використанні критерію максимізації детермінованого еквіваленту майбутнього випадкового доходу інвестора: $\hat{z} = \bar{z} \pm k \cdot \sigma(z)$, $k \geq 0$. Враховуючи можливість лише наближеного відбиття переважань ОПР, у тому числі і оцінювання значення k, припускаємо доцільність поєднання двох зазначених підходів з метою визначення найкращого плану переформовування наявного фінансового портфелю за умов ризику.

Дослідження задачі за умов невизначеності. Будемо вважати, що значення некерованих параметрів d_j – показників доходу, що забезпечується в плановому періоді одним цінним папером j–го виду – можна визначити лише з точністю до діапазонів $[d_j^{\min}; d_j^{\max}]$, де

$$0 < d_j^{\min} \leq d_j^{\max}, \; j = \overline{1, n}.$$

Поширеним для прийняття рішень за умов невизначеності є критерій якнайкращого гарантованого результату Вальда. Керуючись цим критерієм, задачу інвестора можна записати так:

$$[\min_{d\in D} z(d,x,y,v,w)] \xrightarrow[(x,y,v,w)\in\Omega]{} \max, \qquad (6)$$ де

$$d=(d_1,\ldots,d_n),\ x=(x_1,\ldots,x_n),\ y=(y_1,\ldots,y_n),$$

$$z(d,x,y,v,w)=\sum_{j=1}^{n} d_j(a_j-x_j+y_j)-(1+r)v+(1+s)w,$$

$$D=\{(d_1,\ldots,d_n)\mid d_j^{\min}\le d_j\le d_j^{\max},\ j=\overline{1,n}\},$$

а множина Ω задається системою обмежень:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n}(-p_jx_j+q_jy_j)-v+w=I,\\ &0\le x_j\le a_j,\ y_j\ge 0,\ j=\overline{1,n};\quad v,w\ge 0.\end{aligned}\right\}$$

Для пошуку розв’язку максимінної задачі (6) потрібно реалізувати два кроки.

На *першому кроці* необхідно при фіксованих $(x,y,v,w)\in\Omega$ розв’язати задачу:

$$\left.\begin{aligned}&z(d)=\sum_{j=1}^{n} d_j(a_j-x_j+y_j)-(1+r)v+(1+s)w\to\min,\\ &d_j^{\min}\le d_j\le d_j^{\max},\quad j=\overline{1,n}.\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Тут відповідь встановлюється так:

$$d_j^*=\begin{cases} d_j^{\min}, & \text{якщо } a_j-x_j+y_j>0;\\ \text{довільне число з інтервалу } [d_j^{\min};d_j^{\max}], & \\ \qquad\qquad \text{якщо } a_j-x_j+y_j=0 & \end{cases}$$

(випадок $a_j-x_j+y_j<0$ виключений через наявність в описі множини Ω обмежень $0\le x_j\le a_j$ та $y_j\ge 0$);

$$z(d)_{\min}=\sum_{j=1}^{n} d_j^*(a_j-x_j+y_j)-(1+r)v+(1+s)w.$$

На *другому кроці* варто знайти найкращий за критерієм Вальда план переформування фінансового портфеля (x^*,y^*,v^*,w^*) – як результат розв’язування задачі:

$$\left.\begin{aligned}&z(x,y,v,w)=\sum_{j=1}^{n} d_j^*(a_j-x_j+y_j)-(1+r)v+(1+s)w\to\max,\\ &(x,y,v,w)\in\Omega.\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Аналіз розв’язку задачі з першого кроку (7) дозволяє зробити висновок, що в цільовій функції задачі другого кроку у якості значень коефіцієнтів d_j * можна обрати значення $d_j^{\min}$. Таким чином, для вирішення задачі оптимального управління портфелем фінансових активів в умовах невизначеності за критерієм Вальда приходимо до економіко–математичної моделі (1), що була побудована для детермінованого випадку, із тією лише особливістю, що за значення некерованих параметрів d_j у її цільовій функції варто взяти найгірші з їх можливих значень, тобто значення $d_j^{\min}$, $j = \overline{1, n}$.

Приклади розв’язування задач. *Приклад 1.* Опрацюємо спочатку детерміновану задачу оптимального управління портфелем фінансових активів (1) за даними, що наведені у таблиці 1. Вважатимемо, що вільний капітал інвестора $I = 1200$ грошових одиниць, процентна ставка за кредитом $r = 0.3$, а за депозитом $s = 0.2$.

Таблиця 1

Вихідні дані до детермінованої задачі оптимального управління фінансовими активами

Показник активу	Вид активу (j)				
	1	2	3	4	5
Наявність (a_j)	120	200	150	100	250
Ціна продажу (p_j)	2	1,25	3,4	2	2,3
Ціна купівлі (q_j)	2,1	1,3	3,5	2,2	2,5
Дохід на одиницю (d_j)	2,5	1,5	3,8	2,6	3

Оптимальне переформування портфелю фінансових активів полягає у продажі всіх акцій виду 3 та спрямуванні отриманої виручки та вільного капіталу ($150 \cdot 3.4 + 1200 = 1710$ грошових одиниць) на придбання 684 акцій виду 5. Це забезпечуватиме інвестору максимально можливий дохід наприкінці планового періоду у розмірі 3662 грошових одиниць (рис. 1).

A	B	C	D	E	F
Управління фінансовими активами					
Вид активу	1	2	3	4	5
Наявність (a)	120	200	150	100	250
Ціна продажу (p)	2	1,25	3,4	2	2,3
Ціна купівлі (q)	2,1	1,3	3,5	2,2	2,5
Дохід на одиницю (d)	2,5	1,5	3,8	2,6	3
1+% за кредит (1+r)	1,3		Позика (v)		0
1+% на депозит (1+s)	1,2		На депозит (w)		0
Вільний капітал (I)	1200				
Продаж акцій (x)	0	0	150	0	0
Купівля акцій (y)	0	0	0	0	684
Поточні доходи	1710				
Поточні витрати	1710				
Кінцевий дохід (z)	3662				

Рис. 1. Робочий лист Excel з результатами розв’язування задачі про оптимальне управління портфелем фінансових активів у детермінованому випадку.

Розглянута задача має й альтернативний оптимальний план: замість купівлі акцій виду 3 покласти 1710 грошових одиниць на депозит. Враховуючи лінійність задачі, робимо висновок, що оптимальним буде будь–який варіант розподілу капіталу у розмірі 1710 грошових одиниць між депозитним внеском та купівлею акцій виду 3, оскільки дохідність зазначених двох напрямів інвестування однакова (дорівнює 1,2).

Приклад 1 закінчено.

Пошук розв’язку задачі за умов ризику для нейтральної щодо ризику ОПР або за умов невизначеності, якщо керуватися критерієм якнайкращого гарантованого результату, принципово майже не відрізняється від процесу, задіяного для детермінованого випадку – потрібно лише скористатися даними про очікувану дохідність фінансових інструментів у випадку ризику або про мінімально можливу дохідність у випадку невизначеності. Тому опрацюємо лише випадок ризику у припущенні, що ставлення ОПР до ризику може відрізняться від нейтрального.

Приклад 2. Оптимальне управління портфелем фінансових активів за умов ризику. Вважатимемо показники доходу d_j $(j=\overline{1,5})$, який забезпечуватиме у плановому періоді один цінний папір j–го виду, випадковими величинами з відомими очікуваними значеннями та стандартними відхиленнями (таблиця 2).

Таблиця 2

Статистичні характеристики показників випадкового питомого доходу за окремими видами цінних паперів

Характеристика активу	Вид активу (j)				
	1	2	3	4	5
Очікуване значення ($\overline{d}_j$)	2,5	1,5	3,8	2,6	3
Стандартне відхилення (σ_j)	0,7071	0,4472	0,0632	0,5967	0,9487

Оптимальний план шукатимемо за критерієм максимізації детермінованого еквіваленту $\hat{z}$ майбутнього загального випадкового доходу z інвестора:

$$\hat{z} \approx \overline{z} + k \cdot \sigma(z),$$

де $\overline{z}$ – очікуване значення майбутнього загального випадкового доходу, $\sigma(z)$ – стандартне відхилення цього випадкового доходу від його очікуваного рівня, а значення множника k обирається від'ємним у разі несхильності ОПР до ризику або додатним у разі схильності інвестора до ризику. За абсолютною величиною значення цього множника є тим більшим, чим сильніше ставлення ОПР до ризику відрізняється від нейтрального.

Коефіцієнти кореляції між випадковими питомими доходами за напрямами інвестування візьмемо з таблиці 3, інші потрібні вихідні дані – з прикладу 1.

Таблиця 3

Матриця коефіцієнтів кореляції ρ_{ij}

між випадковими питомими доходами

Вид активу (i)	Вид активу (j)				
	1	2	3	4	5
1	1	–0,94388	0,77460	0,99386	0,774560
2	–0,94388	1	–0,52223	–0,97463	–0,52223
3	0,77460	–0,52223	1	0,69985	1
4	0,99386	–0,97463	0,69985	1	0,69985
5	0,77460	–0,52223	1	0,69985	1

Розрахунки показують, що у разі помірної схильності ОПР до ризику (скажімо, $0 < k < 0.25$) інвестору доцільно продати всі акції видів 2 і 3, а дохід від продажу цих акцій та вільний капітал (разом – 1960 грошових одиниць) витратити на придбання 784 акцій виду 5. Сформований у такий спосіб фінансовий портфель забезпечуватиме інвестору очікуваний загальний дохід у розмірі 3662 грошових одиниці з великим стандартним відхиленням від очікуваного рівня – у розмірі 1092,67 грошових одиниць.

Навпаки, інвестору з слабкою несхильністю до ризику ($k = -0.01$) є сенс продати лише акції виду 3, а отриманий дохід та вільний капітал (разом у сумі 1710 грошових одиниць) покласти на депозит, що є в нашому прикладі безризиковим інвестуванням. Тоді загальний очікуваний дохід інвестора теж складатиме 3662 грошових одиниці, але стандартне відхилення загального доходу від очікуваного рівня становитиме лише 298,62 грошових одиниць.

Інвестору з помітною несхильністю до ризику ($-0.5 \geq k \geq -1$) є сенс залишити лише 130 акцій виду 2 та 100 акцій виду 4. Решту наявних акцій потрібно продати, а отриманий дохід разом із початковим капіталом (всього 2612,5 грошових одиниць) спрямувати на депозит. Тоді загальний очікуваний дохід дорівнюватиме 3590, а стандартне відхилення – 13,35 грошових одиниць.

Таким чином, використання економіко–математичного моделювання, оптимізаційних методів та програмних засобів дозволяє знайти якнайкращий варіант переформування наявного фінансового портфеля інвестора, з урахуванням його індивідуального ставлення до ризику.

Запитання для самоконтролю:

1. Обґрунтуйте, що збільшення кількості напрямів інвестування дозволяє покращити фінансовий портфель інвестора.

2. Поясніть, коли і чому показники дохідності фінансових інструментів слушно вважати недетермінованими.

3. Запишіть числову економіко–математичну модель та знайдіть розв'язок детермінованої задачі оптимального управління портфелем фінансових активів за наступними даними:

1) вільний капітал інвестора $I = 100000$ грошових одиниць;

2) відсоткова ставка за кредитом $r = 0.21$;

3) відсоткова ставка за депозитом $s = 0.18$;

4) кількість можливих напрямів інвестування (активів) $n = 4$;

5) основні показники активів:

Показник	Вид активу (j)			
	1	2	3	4
Наявність (a_j)	200	300	500	400
Ціна продажу (p_j)	1,35	1,55	1,43	1,78
Ціна купівлі (q_j)	1,41	1,58	1,47	1,89
Дохід на одиницю (d_j)	3,08	3,14	3,12	2,87

Запишіть двоїсту задачу та проаналізуйте розв'язок прямої задачі за теоремами двоїстості.

Вказівка. Для проведення розрахунків скористайтесь інструментом «Пошук рішення» електронної таблиці Excel.

4. Оцініть статистичні характеристики (очікуване значення та стандартне відхилення) показників дохідності трьох видів активів за наступними експертними даними:

Показник дохідності	Вид активу		
	1	2	3
Мінімальний рівень	1,25	1,73	1,48
Максимальний рівень	1,37	1,76	1,63
Найімовірніший рівень	1,34	1,74	1,54

Яку додаткову інформацію щодо зазначених активів доцільно ще отримати, щоб поставити та розв'язати задачу про формування оптимального фінансового портфелю?

5. Наведіть змістовну економічну інтерпретацію та знайдіть розв'язок задачі Марковиця з такими умовами:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1230, \quad x_1, \quad \ldots, x_4 \geq 0,$$
$$\bar{z} = 1.27x_1 + 1.31x_2 + 0.97x_3 + 1.24x_4,$$
$$\sigma^2(z) = 0.04x_1^2 + 0.09x_2^2 + 0.065x_3^2 + 0.016x_4^2 + 0.531x_1x_3 -$$
$$- 0.020x_1x_4 - 0.011x_2x_3 + 0.023x_2x_4 - 0.014x_3x_4$$

Вказівка. Для пошуку розв'язку попередньо запропонуйте спосіб відбиття індивідуальних переважань фінансового менеджера.

6. Детермінований еквівалент $\hat{z}$ майбутнього випадкового доходу z фінансового портфелю інвестора може обчислюватися за формулою:
$$\hat{z} = \bar{z} + k\sigma(z),$$
де $\bar{z}$ – математичне очікування майбутнього випадкового доходу, а $\sigma(z)$ – його стандартне відхилення. Поясніть, в яких випадках значення параметру k у цій формулі є: а) нульовим, б) додатним, в) від'ємним.

Наведіть метод оцінювання значення параметру k.

7. Вільний капітал фінансового менеджера, який він має намір вкласти в акції, дорівнює 2400 грошових одиниць. Відомі результати статистичного аналізу та експертного оцінювання показників дохідності акцій А, Б, В, Г і Д:

1) статистичні характеристики показників дохідності акцій:

Характеристика	Вид акції				
	А	Б	В	Г	Д
Очікуване значення	1,45	1,54	1,38	1,43	1,35
Стандартне відхилення	0,071	0,044	0,053	0,059	0,094

2) коефіцієнти кореляції між випадковими дохідностями акцій:

Вид акції	Вид акції				
	А	Б	В	Г	Д
А	1	–0,43	0,74	0,38	0,46
Б	–0,43	1	–0,22	–0,46	–0,52223
В	0,74	–0,22	1	0,85	1
Г	0,38	–0,46	0,85	1	0,99
Д	0,46	–0,52223	1	0,99	1

Знайдіть оптимальний фінансовий портфель інвесторі, якщо він є: а) нейтральним до ризику, б) несхильним до ризику, в) схильним до ризику. *Вказівка*. Випадки, коли ставлення інвестора до ризику відрізняється від нейтрального, опрацюйте відповідно до Ваших власних переважань.

8. Інвестор має капітал у розмірі 25600 грошових одиниць, якій він хоче вкласти у цінні папери. Відомі лише їх мінімально та максимально можливі рівні прибутковості. Знайдіть оптимальний фінансовий портфель інвестора, якщо він керується принципом найкращого гарантованого результату, за наступними даними:

Рівень прибутковості	Вид фінансового інструменту					
	1	2	3	4	5	6
Мінімальний	0,21	0,34	0,27	0,25	0,31	0,36
Максимальний	0,43	0,37	0,29	0,35	0,33	0,37

9. Охарактеризуйте зміст та наведіть приклади використання технічного аналізу у торгівлі цінними паперами.

10. Охарактеризуйте зміст та наведіть приклади використання фундаментального аналізу у торгівлі цінними паперами.

Список рекомендованих джерел:

1. Вітлінський В.В. Моделювання економіки: [навч. посіб.] / В.В. Вітлінський. – 2-ге вид. / В.В. Вітлінський. – К.: КНЕУ, 2007. – 408 с.
2. Дідик Л.М. Фондовий ринок України: проблеми та шляхи підвищення ефективності функціонування / Л.М. Дідик, Є.А. Уланова // Економічний простір. – 2008. – № 19. – С. 149-160.
3. Загорна Т.О. Економічна діагностика : [навч посібн.] / Т.О. Загорна. – К.: ЦУЛ, 2007. – 400 с.
4. Кігель В.Р. Оптимізація фінансових рішень: Навчальний посібник. / Кігель В.Р. – К.: Дорадо–Друк, 2011. – 172 с.
5. Ляшенко В.И. Фондовые индексы зарубежных рынков / В.И. Ляшенко, К.В. Павлов. – М.: Магистр. – 2007. – 558с.
6. Твардовский В.В. Секреты биржевой торговли : Торговля акциями на фондовых биржах / В.В. Твардовский, С.В. Паршиков. – М.: Альпина Паблишер, 2003. – 530 с.
7. Топішко А.І. Торгівля цінними паперами в Україні / А.І. Топішко, М.М. Ройко, Є.Р. Іванов. – К.: АДС УМК Центр, 2008. – 307 с.
8. Фондовий ринок: теорія і практика / [О.П. Корнійчук та ін.]; За ред. д.е.н., проф., акад. НАНУ Б.М. Данилишина. – К.: НАНУ, 2009. – 224 с.
9. Шарп У. Инвестиции: Пер. с англ. / Шарп У., Гордон Дж., Бэйли Дж. – М: Инфра–М, 1997. – 1024 с.
10. Markowitz H.M. Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments. – N.Y.: John Willey, 1959. – 758 p.